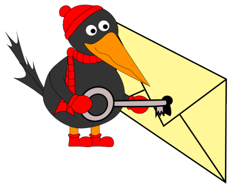
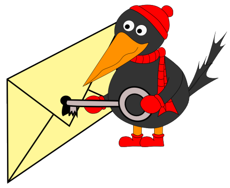


Řešení 5. série

Hmotné body

autor: *Stopa a Vláďa*



Úloha 5.1. Těžko tomu uvěřit, ale opravdu existují i zábavnější věci, než držet stráž. Dokonce není těžké dokázat, že je jich nespočetně mnoho. Proto, prosím, hleďme shovívavě na stráže, které se místo hlídání s povděkem chytí jakékoli matematické úlohy na ukrácení chvíle, i když jim je zadána podezřelou zahalenou postavou. Obzvlášť, když taková úloha zní takto: Je dán trojúhelník ABC, přičemž bod A má hmotnost 1 a bod B má hmotnost 2. Těžiště hmotného systému ABC označme T (přičemž T leží uvnitř ABC). Bodem T vedeme rovnoběžku s AB a její průsečík s AC, resp. BC označíme U, resp. V. Zjistěte všechny možné hmotnosti, které může mít bod C, pokud platí $\frac{|CA|}{|UV|} \cdot \frac{|CB|}{|CU|} \cdot \frac{|TV|}{|CV|} = 3$. Strážce byl dost bystrý chlapík na to, aby úlohu vyřešil, ovšem nikoli dost bystrý na to, aby si všiml, že zahalená postava mezitím nenápadně proklouzla kolem.

Řešení. Označme těžiště hmotného systému AB jako D (díky vlastnostem těžiště (T leží uvnitř ABC) je to průsečík přímek AB a CT, navíc platí $\frac{|AD|}{|DB|} = \frac{2}{1}$). Díky rovnoběžnosti úseček AB, UV jsou zřejmě trojúhelníky CAB, CUV a CDB, CTV podobné se stejným koeficientem, označme ho k. Pak platí $\frac{|CD|}{|CT|} = \frac{|CA|}{|CU|} = \frac{|CB|}{|CV|} = k$ a $\frac{|TV|}{|UV|} = \frac{|DB|}{|AB|} = \frac{1}{3}$. Dosazením do zadaného vztahu pak dostáváme $k^2 = 9$, tedy $k = 3$ (koeficient podobnosti musí být kladný). Platí tedy $\frac{|CT|}{|DT|} = \frac{1}{2}$, a protože hmotnost bodu D je $1 + 2 = 3$, podle zákona páky musí hmotnost bodu C být 6.

Úloha 5.2. Vedro bylo neúnosné. Matěj s Liběnkou se pomalu plahočili pouští, vyprahlí žízní a touhou po geometrickém příkladu. Najednou spatřili oázu, uprostřed níž se vznášel trojúhelník ABC. Na straně AB bod F splňující $\frac{|AF|}{|BF|} = \frac{6}{5}$, na straně BC bod D splňující $\frac{|BD|}{|CD|} = \frac{1}{2}$ a na straně AC bod E splňující $\frac{|AE|}{|CE|} = \frac{4}{5}$. Průsečík přímek DE a CF byl označen jako G. Hned je napadlo, že by pomocí hmotných bodů mohli určit poměry $\frac{|CG|}{|FG|}$ a $\frac{|DG|}{|EG|}$.

Řešení. Pro zjištění poměrů bude nejjednodušší určit libovolné hmotnosti hmotných bodů $aA, bB, (c_1 + c_2)C$ tak, aby platily následující rovnosti:

$$aA + bB = (a + b)F$$
$$aA + c_1C = (a + c_1)E$$
$$bB + c_2C = (b + c_2)D$$

První rovnicí máme zajištěno, že těžiště systému bude ležet na přímce CF, další dvě nám zajišťují, že bude ležet na přímce DE. Těžištěm hmotného systému je tedy bod $aA + bB + (c_1 + c_2)C = (a + b + c_1 + c_2)G$. Z rovnic a z poměrů v zadání navíc získáme následující vztahy:

$$\frac{a}{b} = \frac{|BF|}{|AF|} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{a}{c_1} = \frac{|CE|}{|AE|} = \frac{5}{4}$$
$$\frac{b}{c_2} = \frac{|CD|}{|BD|} = \frac{2}{1}$$

Zvolíme tedy například $a = 5, b = 6$ a z druhé rovnice získáme $c_1 = 4$, z třetí pak $c_2 = 3$. Celkově poté úpravou výše napsaných rovnic platí $(a+b)F+(c_1+c_2)C = (a+b+c_1+c_2)G$ neboli $\frac{|CG|}{|FG|} = \frac{a+b}{c_1+c_2} = \frac{11}{7}$. Podobně platí $(a+c_1)E+(b+c_2)D = (a+b+c_1+c_2)G$ a tedy $\frac{|DG|}{|EG|} = \frac{a+c_1}{b+c_2} = \frac{9}{9} = 1$.

Úloha 5.3. Henry se naopak třásl zimou, až tak chladnou hlavu si zachoval. Předpokládal, že ho brzy začnou pronásledovat a že nemá moc času. Potřeboval odněkud vyslat signál pro případ, že by po něm přece jen někdo pátral. Zrovna přemýšlel, jak to udělat, když ho napadl pěkný příklad: V trojúhelníku ABC označme střed strany AB jako M, střed strany BC jako N a body dotyku kružnice vepsané trojúhelníku ABC se stranami AB, resp. AC jako D, resp. **E**. Pomocí hmotných bodů ukažte, že přímky DE, MN a osa vnitřního úhlu u vrcholu C procházejí jedním bodem.

Řešení. Podle *Tadeáše Kučery*:
Označme P průsečík osy úhlu u vrcholu C se stranou AB. Zvolme hmotné body aA, bB, cC tak, aby

$$\begin{aligned} a &= |BP| \cdot g \\ b &= |AP| \cdot g \\ c &= (|AP| - |BP|) \cdot g, \end{aligned}$$

kde g je hmotnostní jednotka. Potom zřejmě platí

$$\begin{aligned} a \cdot |AP| &= b|BP| \\ b &= a + c \end{aligned}$$

Z první rovnosti plyne, že bod $aA + bB = (a+b)P$, a tedy těžiště $(a+b+c)T$ hmotného systému $\{aA, bB, cC\}$ leží na přímce CP.
Z druhé rovnosti vyplývá, že bod bB lze nahradit dvěma hmotnými body aB, cB, aniž by se změnilo těžiště systému. Pak je $aA + aB = 2aM$ a $cC + cB = 2cN$, přičemž $(a+b+c)T = aA + bB + cC = aA + aB + cB + cC = 2aM + 2cN$ a tedy T leží také na přímce MN.
Dále ze sinové věty platí

$$\begin{aligned} \frac{|AC|}{\sin|\sphericalangle APC|} &= \frac{|AP|}{\sin|\sphericalangle ACP|} \\ \frac{|AC|}{|AP|} &= \frac{\sin|\sphericalangle APC|}{\sin|\sphericalangle ACP|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BPC|} &= \frac{|BP|}{\sin|\sphericalangle BCP|} \\ \frac{|BC|}{|BP|} &= \frac{\sin|\sphericalangle BPC|}{\sin|\sphericalangle BCP|}. \end{aligned}$$

Navíc platí $|\sphericalangle ACP| = |\sphericalangle BCP|$ a $\sphericalangle APC$ a $\sphericalangle BPC$ jsou vedlejší, tedy jejich sinus je stejný. Z toho plyne

$$\frac{|BC|}{\sin|\sphericalangle BPC|} = \frac{|BP|}{\sin|\sphericalangle BCP|} = \frac{\sin|\sphericalangle BPC|}{\sin|\sphericalangle BCP|} = \frac{|BC|}{|BP|}.$$

$$|BP| \cdot |AC| = |AP| \cdot |BC| \tag{5.1}$$

Z vlastností bodů dotyku kružnice vepsané plyne $|AD| = |AF|, |BD| = |BE|, |CE| = |CF|$. Z toho tedy $|AC| = |AF| + |CF| = |AD| + |CE|$ a $|BC| = |BE| + |CE|$. Dosazením do (5.1) pak máme

$$\begin{aligned}
|BP| \cdot (|AD| + |CE|) &= |AP| \cdot (|BE| + |CE|) \\
|BP| \cdot |AD| &= (|AP| - |BP|) \cdot |CE| + |AP| \cdot |BE| \\
|BP| \cdot g \cdot |AD| &= (|AP| - |BP|) \cdot g \cdot |CE| + |AP| \cdot g \cdot |BE| \\
a|AD| &= c|CE| + b|BE| \\
a &= c\frac{|CF|}{|AD|} + b\frac{|BD|}{|AD|} \\
a &= c\frac{|CF|}{|AF|} + b\frac{|BD|}{|AD|}.
\end{aligned}$$

Z toho je vidět, že hmotný bod aA lze nahradit dvěma hmotnými body a_1A, a_2A tak, aby $a_1|AD| = b|BD|$ a $a_2|AF| = c|CF|$, neboli $a_1A + bB = (a_1 + b)D$, $a_2A + cC = (a_2 + c)F$, $a_1A + a_2A = aA$ a tudíž $aA + bB + cC = a_1A + bB + a_2A + cC = (a_1 + b)D + (a_2 + c)F = (a + b + c)T$, tedy T leží i na přímce DF. Z toho plyne, že bod T leží zároveň na přímkách CP, MN i DF a tudíž se tyto přímky protínají v jediném bodě, což jsme chtěli dokázat.

Úloha 5.4. Matěj s Liběnkou byli zcela opojeni. „Kouma s Ňoumou se takhle dobře určitě nemají,“ zakoulel ušima Matěj. „Ticho,“ okřikla ho Liběnka, „objevuje se další zadání!“ A skutečně: oázu zahalil oblak mlhy, a když pominul, levitovaly v jejím středu rovnoběžníky $ABCD$ a $AEFG$ takové, že bod E ležel na přímce AB a byl různý od B, a G ležel na AD a byl různý od D. Průsečík přímek DC a EF byl označen jako H. Vzduch byl naplněn vůní kokosů a šumění palem přímo vybízelo k použití hmotných bodů k dokázání toho, že přímky AH, BF a CG procházejí jedním bodem (označme ho I) a k určení poměru $\frac{|AI|}{|HI|}$ v závislosti na stranách rovnoběžníků.

Řešení. Nejprve dokažme, že se přímky AH, BF a CG protínají v bodě I. K tomu nám postačí, pokud najdeme hmotné body aA, bB, cC, hH, fF, gG takové, aby hmotné systémy $\{aA, hH\}, \{bB, fF\}, \{cC, gG\}$ měly společné těžiště v bodě I.
Přidáme-li k systému $\{aA, hH\}$ body $1E$ a $-1E$, těžiště tohoto systému se zcela jistě nezmění. Najděme hmotnost bodu aA tak aby platilo

$$aA + 1E = (a + 1)B. \tag{5.2}$$

Z toho tedy získáváme rovnici $a \cdot |\overrightarrow{AB}| + 1 \cdot |\overrightarrow{EB}|$ neboli $a = \frac{|\overrightarrow{EB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$. Podobně nalezněme hmotnost bodu hH tak, aby

$$hH + (-1)E = (h - 1)F. \tag{5.3}$$

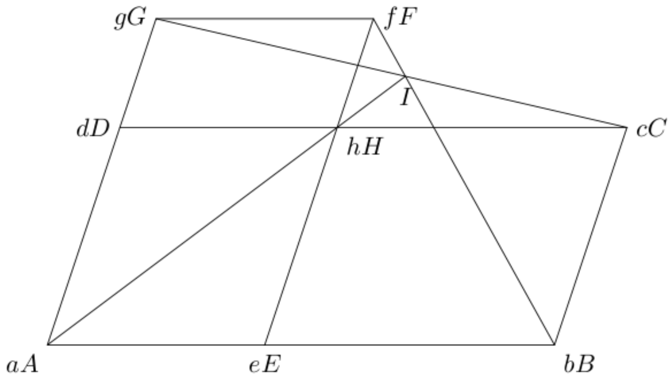
Analogicky dojdeme k výsledku $h = \frac{|\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{HF}|}$.
Nyní k soustavě $\{aA, hH\}$ přidejme body dD a $-dD$. Hmotnost d zvolme tak, aby platilo

$$aA + dD = (a + d)G. \tag{5.4}$$

Z rovnosti $a|\overrightarrow{AG}|+d|\overrightarrow{DG}|=0$ pak dostáváme po dosazení za a, že hmotnost $d=\frac{|\overrightarrow{AG}|}{|\overrightarrow{DG}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{EB}|}{|\overrightarrow{AB}|}$. A protože $ABCD$ a $AEFG$ jsou rovnoběžníky, platí $d=\frac{|\overrightarrow{AG}|}{|\overrightarrow{DG}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{EB}|}=\frac{|\overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{HF}|}\cdot\frac{|\overrightarrow{HC}|}{|\overrightarrow{DC}|}$. Z toho vyplývá, že $-d\cdot|\overrightarrow{DC}|+h\cdot|\overrightarrow{HC}|=0$ a tedy

$$-dD+hH=(-d+h)C. \tag{5.5}$$

Sečtením (5.2) a (5.3), resp. (5.4) a (5.5) získáme $aA+hH=(a+1)B+(h-1)F=(a+d)G+(h-d)C$. Z toho vyplývá, že tyto tři hmotné systémy mají společné těžiště v bodě I a navíc musí platit $\frac{|AI|}{|HI|}=\frac{|h|}{|a|}=\frac{|AB|\cdot|EF|}{|EB|\cdot|HF|}=\frac{|AB|\cdot|AG|}{|(|AB|-|AE|)\cdot(|AG|-|AD|)|}$.



Úloha 5.5. „Na jednu stranu je mi líto, že se náš tajný dopravní prostředek rozlomil a zanechal Matěje s Liběnkou v paralelních částech," přemítal Kouma, „ale na druhou stranu to příběhu prospěje a aspoň jsme se dostali blíž Henrymu." „Signál přicházel z této pevnosti," přikývl Ňouma. Kouma rozrazil bránu a zařval: „Je tady někdo?" „To nebylo příliš diskrétní, Koumo," pokáral ho Ňouma. Narozdíl od tohoto příkladu: Najděte všechny neprázdné množiny A celých čísel splňující:

a) pro všechna přirozená čísla x platí, že právě jedno z čísel x, $-x$ leží v A,

b) pro všechna x, $y\in A$ leží $xy-1$ v A.

Řešení. Předpokládejme, že máme množinu A, která vyhovuje zadání. Pak pro všechna $n\in\mathbb{N}$ platí $n\in A$, nebo $-n\in A$, takže volbou $x=y=\pm n$ (zvolíme vždy takové znaménko, jaké má příslušný prvek z A) dostáváme $n^2-1\in A$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$. Speciálně $3\in A$ a $0\in A$ a dále $0\cdot 0-1=-1\in A$. Kdyby platilo $2\in A$, dostali bychom $(-1)\cdot 2-1=-3\in A$, co je spor s $3\in A$, a kdyby platilo $-2\in A$, dostali bychom $(-1)\cdot(-2)-1=1\in A$, co je spor s $-1\in A$. Proto žádná taková množina A nemůže existovat.

Úloha 5.6. „Mělo nás hned napadnout, že je to jen fata morgána. Na tak pěkné příklady člověk málokdy narazí," poznamenal Matěj. Vtom se v poryvu větru zvedl písek a obklíčila je parta drsně vzhlížejících nomádů. „Jste našimi zajatci," vyštěkl ten, jehož poměr délky plnovousu ku šířce levé kyčle byl roven stříbrnému řezu. „Jediný způsob, jak vás vykoupit, je donést nám všechny polynomy P s celočíselnými koeficienty, které splňují, že pro libovolná dvě celá čísla a, b s nenulovým součtem platí $(a+b)\mid a\cdot P(b)+b\cdot P(a)$." Liběnka rychle začala počítat, aby zjistila, zda v ní má hrknout strachy, či nikoliv.

Řešení. Zadaný vztah má platit pro všechna $a, b \in \mathbb{Z}$ s nenulovým součtem, speciálně pro taková, která jsou nesoudělná, tj. $(a, b) = 1$. Chceme, aby hledaný polynom splňoval kongruenci

$$aP(b) \equiv -bP(a) \pmod{a+b},$$

která po přičtení $(a+b)P(a)$ k pravé straně přejde v

$$aP(b) \equiv aP(a) \pmod{a+b}.$$

Protože $(a, a+b) = (a, b) = 1$, můžeme obě strany vydělit a, čímž získáme

$$P(b) \equiv P(a) \pmod{a+b}.$$

Nyní si vzpomeneme na známou větu, která říká, že pro libovolný polynom P s celočíselnými koeficienty a $x, y \in \mathbb{Z}$ platí $P(x) \equiv P(y) \pmod{x-y}$ (stačí si uvědomit, že pro $n \in \mathbb{N}_0$ můžeme z výrazu $x^n - y^n$ vytknout závorku $(x-y)$). Volbou $x = a, y = -b$ pak dostáváme

$$P(a) \equiv P(-b) \pmod{a+b},$$

takže (díky tranzitivitě kongruence) hledaný polynom musí splňovat

$$P(b) \equiv P(-b) \pmod{a+b}.$$

Protože tato kongruence platí podle nekonečně mnoha modulů, musí nastat rovnost $P(b) = P(-b)$ pro všechna $b \in \mathbb{Z}$ (jediné celé šíslo s nekonečným počtem dělitelů je 0). To znamená, že hledaný polynom musí být sudá funkce, tj. všechny koeficienty u lichých mnocnin musí být nulové.

Nech naopak P je sudý polynom a $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq -b$. Pak podle výše uvedené věty platí

$$P(b) \equiv P(-a) = P(a) \pmod{a+b}.$$

Z této kongruence plyne požadovaný vztah

$$a+b \mid a(P(b) - P(a)) + (a+b)P(a) = aP(b) + bP(a).$$

Zadání úlohy proto splňují právě všechny sudé polynomy s celočíselnými koeficienty.

Úloha 5.7. „Nikdo tu není," povzdechl si Ňouma. „Celé to bylo úplně k ničemu." Kouma však s úsměvem ukázal na zeď. „Takovýto příklad nám tu mohl nechat jedině Henry. Když ho vyřešíme, určitě zjistíme, kde ho najít!" Na zdi bylo nevzhledně naškrábáno: Najděte všechny trojice přirozených čísel a, b, c splňující $3b^2 + a(bc - a) = 241$ takových, že systém rovnic $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = a$, $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} = b$, $\frac{z}{x} + \frac{x}{z} = c$ má pro proměnné x, y, z řešení v reálných číslech.

Řešení. Předpokládejme, že pro $a, b, c \in \mathbb{N}$ a $x, y, z \in \mathbb{R}$ platí $a = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}, b = \frac{y}{z} + \frac{z}{y}, c = \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$. Vynásobením těchto rovností získáme

$$\begin{aligned} abc = \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)\left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) &= \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{y^2} + \frac{z^2}{x^2} + \frac{x^2}{z^2} + 2 \\ &= \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)^2 - 2 + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right)^2 - 2 + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right)^2 - 2 + 2 = a^2 + b^2 + c^2 - 4. \end{aligned}$$

Dosadíme do zadaného vztahu:

$$241 = 3b^2 + a(bc - a) = 3b^2 + a^2 + b^2 + c^2 - 4 - a^2,$$

tedy $4b^2 + c^2 = 245$. Zřejmě musí být $b < 8$, a protože $b, c \in \mathbb{N}$, vyzkoušením několika možností snadno objevíme, že jediným řešením této rovnice je $b = c = 7$. Opětovným dosazením do zadaného vztahu dostáváme kvadratickou rovnici $241 = 147 + 49a - a^2$, jej řešení jsou $a = 2$ a $a = 47$. Zbývá ověřit, že obě tyto trojice opravdu vyhovují. Skutečně, pro $a = 2, b = c = 7$ má zadaná soustava například řešení $x = y = 1, z = \frac{1}{2}(7 + 3\sqrt{5})$, a pro $a = 47, b = c = 7$ má například řešení $x = \frac{1}{2}(47 + 21\sqrt{5}), y = 1, z = \frac{2}{7-3\sqrt{5}}$. Obě tyto trojice jsou proto jedinými řešeními zadané úlohy.

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

`www.generaceY.cz`; `www.reformy-msmt.cz`

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ