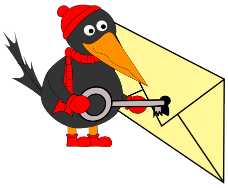
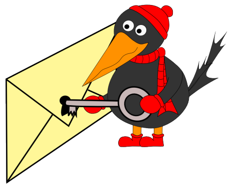
Řešení 4. série



Matematická indukce



autor: *Baci a Emu*

Úloha 4.1. V zešeřelém pokoji zlověstně plápolala svíčka. Ticho se dalo krájet Henkelmozartem, obalit v mrazivé pochybnosti, potřít v neblahé předtuše a servírovat přímo do sevřených útrob. Vysoká postava v černé kápi se o to ovšem nepokoušela. Místo toho pomalu, ale sebejistě kráčela k tabuli. Konečně. Po všech těch letech. Čekání je u konce. Temné oči jí zaplály, když spatřila tajemství, které tabuli pokrývalo. Hmm. Něco tu nehrálo. Na první pohled to moc nevypadalo jako tajemství. Na druhý to vypadalo ještě o poznání hůře. A na třetí… „Vždyť je to bazmek!“ vykřikla by, kdyby neoplývala zlodějskou ohleduplností a neměla strach, že bude narušovat spací režim místních. Na tabuli bylo napsáno velké písmeno B. Nic víc. Postava v záchvatu zuřivosti popadla křídu a v každém kroku smazala jedno písmeno B a nahradila ho sekvencí (B+B). Dokažte, že počet písmen B na tabuli byl po každém kroku větší nebo rovný čtvrtině celkového počtu znaků na tabuli, ať už její amok trval jakkoli dlouho. Pravá závorka, levá závorka a znaménko plus jsou také znaky.

Řešení. Úloha je jednoduchá – použijeme prirodzene matematickú indukciu vzhľadom k počtu vykonaných krokov. Na začiatku (počet krokov je 0) máme na tabuli 1 znak a tým je B. Dokazované tvrdenie teda evidentne platí. Predpokladajme platnosť tvrdenia pre situáciu po k krokoch – označme b počet znakov B a z počet všetkých znakov v tejto situácii. Platí teda $4b \geq z$. Uvážme situáciu po $k+1$ krokoch – táto vznikne zo situácie po k krokoch vykonaním jedného kroku. Keďže jeden znak B nahradíme dvoma znakmi B a troma inými znakmi, celkový počet znakov bude po $k+1$ krokoch $z+4$ a počet B bude $b+1$. Platí $4b \geq z$, stadiaľ $4b+4 \geq z+4$ a teda $b+1 \geq \frac{z+4}{4}$, čo je tvrdenie, ktoré sme chceli dokázať.

Úloha 4.2. První podezření pojali ve chvíli, kdy otevřeli onen obyčejně vyhlížející dopis. „Vypadá to jako zašifrovaná zpráva,“ vydechla Liběnka. „Mohla by být od Henryho,“ napadlo Matěje a pustil se do dekódování. Nikdo by to do dopisu neřekl, ale byl v něm čtverečkovaný papír s nekonečně mnoha řádky a nekonečně mnoha sloupci (měl ovšem levý horní roh). V každém políčku tohoto papíru bylo vepsáno reálné číslo, a to podle těchto pravidel: do prvního řádku (počítáno odshora) byla zleva vepsána posloupnost reálných čísel $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ tak, že číslo a_m se nacházelo v m-tém sloupci prvního řádku (počítáno zleva). Další řádky byly vyplněny následovně: v každém políčku P se nacházel rozdíl čísla v tom políčku, které se rohem dotýkalo pravého horního rohu políčka P, a čísla v tom políčku, které bylo přímo nad políčkem P. (Tedy například v n-tém sloupci druhého řádku bylo číslo $a_{n+1} - a_n$). Dokažte, že když si Matěj vybral libovolná přirozená čísla k a n, byla v $k+1$-tém řádku n-tého sloupce, hodnota $\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} a_{n+i}$.

Řešení. Nech $A(k,n)$ je rovné hodnote v k-tom riadku a n-tom stĺpci. Máme teda dokázať, že $A(k+1,n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} a_{n+i}$. Budeme postupovať induktívne vzhľadom ku k. Pre bázu nech sa $k=1$. Podľa pravidiel, ktorými je papier vyplnený, platí:

$$A(2,n) = a_{n+1} - a_n = \sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} (-1)^{1-i} a_{n+i}.$$

BRKOS Team 2013

To je dokazované tvrdenie. Predpokladajme teraz platnosť tvrdenia pre k a dokážeme ho pre $k+1$:

$$A(k+2,n) = A(k+1,n+1) - A(k+1,n) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} a_{n+1+i} - \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} a_{n+i}.$$

Teraz z prvej sumy odtrhneme posledný a z druhej prvý člen, zároveň z druhej vynímame -1:

$$A(k+2,n) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i-1} (-1)^{k-(i-1)} a_{n+1+i-1} + a_{n+1+k} + (-1)^{k+1} a_n + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} (-1)^{k-i+1} a_{n+i}.$$

Teraz sumy spojíme do jednej:

$$A(k+2,n) = \binom{k+1}{0} (-1)^{k+1} a_n + \sum_{i=1}^{k} \left(\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} \right) (-1)^{k-i+1} a_{n+i} + \binom{k+1}{k+1} a_{n+1+k}.$$

Využijeme, že $\binom{k}{i-1} + \binom{k}{i} = \binom{k+1}{i}$:

$$A(k+2,n) = \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} (-1)^{k-i+1} a_{n+i}.$$

Tým pádom je dôkaz hotový.

Úloha 4.3. Ta samota už byla pěkně otravná. „Člověk si chvíli kreslí na tabuli, a než se naděje, kreslí si místo toho na zeď svého vězení,“ pomyslel si Henry. „Proč jen musí být unášení antisymetrické?“ Z úvah ho vyrušil tajuplné šeptání, vycházející zpoza zdi. Když k ní opatrně přitiskl ucho, zaslechl: „Nechť F_n zna čí n-tý člen Fibonacciho postupnosti, tedy platí $F_1 = F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$. Ať si zvolím přirozené číslo n jakkoli, vždy k němu lze najít přirozené číslo k a přirozená čísla $s_1, s_2, \ldots, s_k$ taková, že pro všechna i z množiny $\{1, 2, \ldots, k\}$ platí buď $s_i = 1$, nebo $s_i = 2$, a navíc platí rovnost $n = s_1F_1 + s_2F_2 + \cdots + s_kF_k$.“ Henrymu hned bylo jasné, že tajuplný hlas má pravdu. Pomyslel si, že by důkaz měl přenechat řešitelům jako třetí úlohu.

Řešení. Opäť použijeme indukciu, vzhľadom k n. V bázovom kroku $n = 1$, zvolíme $k = 1$ a $s_1 = 1$, dokazovaná rovnosť evidentne platí, a podobne v bázovom kroku $n = 2$ zvolíme $k = 2$ a $s_1 = s_2 = 1$, teda zrejme platí $2 = 1F_1 + 1F_2$. Predpokladáme platnosť pre nejaké n, máme teda $n = s_1F_1 + s_2F_2 + ... + s_kF_k$. Uvážme teraz $n+1$. Pokiaľ s_1 alebo s_2 je rovné jednej, stačí ho zmeniť na 2 a máme tak riešenie pre $n+1$.

Pokiaľ $s_1 = s_2 = 2$, urobíme nasledovné úpravy: Označíme p najmenšie číslo také, že $s_p = 1$. Využijeme fakt, že $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Môžme teda upraviť s_p na 2, s_{p-1} a s_{p-2} na 1, čím nezmeníme hodnotu súčtu. Pokiaľ by všetky čísla s boli rovné dvom, posledné dve položíme rovné jednej a pridáme s_{k+1} rovné 1. Takúto úpravu opakujeme dovtedy, kým buď s_1 alebo s_2 nie je rovné jednej. Potom jednoducho toto číslo zmeníme na 2 a máme tým pádom súčet $n+1$. Tvrdenie sme teda dokázali.

Úloha 4.4. Liběnka polkla. „Říkáš, že mu hrozí nebezpečí? A že mu musíme pomoci?“ Matěj vážně přikývl. „Proto jsme přišli na toto hrůzostrašné místo.“ Poklepal prodavači na rameno. „Á, zákazníci, vítejte! Je libo nejnovější model našeho skvělého segwaye?“ halasil. „Tak hele, jsi prodavač, nebo zákazník?“ vztekal se pravý prodavač. „Prostě si nějak vyber, je s nima legrace!“ Matěj potemněl. „Nechceme tu . . . věc . . . ,abychom se mohli bavit. Je to ale jediný způsob, jak zachránit našeho–“ „Ale jistě, jistě, to říkají všichni. Abyste věděl, máme tu teď akci. Když si tu člověk A koupí segway, může přilákat až dva nové zákazníky B,C (kteří tu ještě nikdy nenakupovali) a přesvědčit je, aby si segway také koupili.“ Když pak každý ze zákazníků B,C tímto způsobem přesvědčí (přímo či nepřímo) alespoň dalších n nových zákazníků (pro nějaké dané přirozené n), dostane zákazník A zdarma helmu proti pádu ze srázů. A to se vyplatí! Liběnka se na chvíli zamyslela. „Ale… neznamená to pak, že když si segway koupí z zákazníků, může dostat helmu nejvýše $\frac{z}{n+2}$ z nich?“ „To mi nikdy nemůžete dokázat,“ zamračil se segwayář. „Vlastně je to docela jednoduché,“ usmála se Liběnka. Proč měla pravdu?

Řešení. Nech h je počet heliem, ktoré zákazníci dostali. Dokazujeme teda $h \leq \frac{z}{n+2}$, alebo $h(n+2) \leq z$. Postupujeme indukciou ku h. Ak $h = 1$, je zrejmé že z je aspoň $2n+3$ (A, B, C a dvakrát n zákazníkov). Teda $z \geq 2n+3 \geq n+2$. Predpokladajme platnosť pre $h = k$, teda platí $h(n+2) \leq z_k$. Uvážme $h = k+1$. Spomedzi zákazníkov, ktorí dostali helmu, existuje aspoň jeden taký zákazník L, že žiaden zo zákazníkov, ktorých priamo či nepriamo presvedčil, už helmu nedostal. Odstráňme teraz spomedzi týchto presvedčených niekoľko zákazníkov tak, aby zostalo práve n zákazníkov ktorých L priamo či nepriamo presvedčil. Tým pádom L príde o svoju prilbu, ale zároveň žiaden iný o svoju helmu nepríde. Dostali sme sa do situácie z indukčného predpokladu. Je zrejmé, že takto sme odstránili minimálne $n+2$ zákazníkov, teda platí $z_{k+1} - (n+2) \geq z_k$. Tým pádom $h(n+2) \leq z_{k+1} - (n+2)$, čiže $(h+1)(n+2) \leq z_{k+1}$. To je presne dokazované tvrdenie.

Úloha 4.5. Kouma s Ňoumou zrovna prožívali svůj tradiční (po)hádkový večer. Široko daleko se rozléhaly zvuky tříštícího se nádobí, letících n-zubců, praskajících kostí, přežvykujících sitatumb a komponujících se bifunktorů. A pak došlo na tu nejhorší zbraň: slova. "Máš místo nosu čtverec!" "Tvé ontologické úvahy připomínají čtverec!" "Tvoje babička je čtverec!" "Pro všechna celá čísla k, n je výraz $n-xy$, kde $x = n-k^2$ a $y = (k+1)^2-n$, čtverec!" zvolal triumfálně Ňouma. Kouma se ani nezmohl na odpověď. Rozhodněte, zda byl Ňoumův výrok pravdivý (samozřejmě ten poslední). Čtvercem rozumíme druhou mocninu nějakého celého čísla.

Řešení. Nejprve dosaďme za xy:

$$xy = n(k+1)^2 - k^2(k+1)^2 - n^2 + nk^2,$$

pak tedy

$$\begin{aligned} n - xy &= n - n(k+1)^2 + k^2(k+1)^2 + n^2 - nk^2 \\ &= n - nk^2 - 2nk - n + k^4 + 2k^3 + k^2 + n^2 - nk^2 \\ &= k^4 + k^2 + n^2 + 2k^3 - 2nk^2 - 2nk \\ &= (k^2 + k - n)^2. \end{aligned}$$

Tím je tvrzení dokázáno.

Úloha 4.6. Ding dong. Prásk. Uiíí. Hepčí. Ble. Skříp. Žglomst. "Nerad vás ruším, ať už jste tady dělali cokoli," vyvalil oči Matěj, "ale potřebujeme vaši pomoc." Ňouma se zatvářil potěšeně. "Fakt? Od nás?" "Liběnka si povzdechla. "Je to nebezpečné. Naším protivníkem je samotná smrt, a jedná se o hru s nulovým součtem. Jste poslední, kdo nás ještě neodmítnul. Jde vlastně o tohle…" O chvíli později Kouma zvolal: "Ale vždyť je úplně jasné, co musíme udělat! Počkejte, narýsuju vám to. Tu tajnou věc, o které jsme před chvílí mluvili, bude reprezentovat tento trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu A. Patu výšky z vrcholu A na stranu BC označíme D. Pak najdeme na straně AC bod E tak, aby byl trojúhelník BEC rovnoramenný se základnou BC. Když víme, že vzdálenosti $|CD|$ a $|BE|$ jsou shodné a rovny jednomu sáhu, můžeme přece snadno dopočítat vzdálenost $|AE|$!" Ostatní se ale tvářili nechápavě. Zjistěte vzdálenost $|AE|$, ať Kouma nemá pocit, že mu nikdo nerozumí.

Řešení. Zřejmě $|CE| = 1$. Označme $|AE| = x$ a $|\measuredangle ACD| = \gamma$. Pak $|\measuredangle BEC| = 180 - 2\gamma$ a tedy $|\measuredangle AEB| = 2\gamma$. Z trojúhelníku ADC máme $\cos\gamma = \frac{1}{1+x}$ a z trojúhelníku ABE máme

$$\begin{aligned} x &= \cos 2\gamma \\ &= 2\cos^2\gamma - 1 \\ &= \frac{2}{(1+x)^2} - 1, \end{aligned}$$

z čehož plyne $x + 1 = \frac{2}{(1+x)^2}$ a $x = \sqrt[3]{2} - 1$.

Úloha 4.7. Henry přestával věřit, že jeho dopis někdo četl. Bylo načase vzít věci do vlastních končetin. Z rozhovorů strážných si udělal poměrně slušnou představu o tom, na jakém principu funguje bezpečnostní systém objektu. Po objektu je rozmístěno 1000 tajných kotoučů, přičemž každý z nich může být ve čtyřech různých pozicích A,B,C,D. Každou kotouč je možné otočit pouze z pozice A do pozice B, z pozice B do pozice C, z pozice C do pozice D, nebo z pozice D do pozice A. Na začátku jsou všechny kotouče v pozici A.Kotouče jsou polepeny čísly tvaru $2^x3^y5^z$, kde (x, y, z) jsou postupně všechny možné uspořádané trojice čísel z množiny $\{0, 1, \ldots, 9\}$ (každá z těchto uspořádaných trojic je použita na právě jeden kotouč). Strážný postupně chodí ke kotoučům a otáčí je o jednu pozici vpřed, každý právě jednou. Ve chvíli, kdy strážný otočí kotouč s nálepkou s číslem T, jsou o jednu pozici vpřed otočeny i všechny kotouče s nálepkou, na které je dělitel čísla T menší než T. Pomozte Henrymu zjistit, kolik kotoučů bude po 1000 krocích v pozici A, aby si mohl připravit plán na útěk.

Řešení. Správné řešení *Davida Bainara*, děkujeme za vypůjčení. :o)

Každý kotouč se otočí vždy, když se otočí kotouč s jeho násobkem. Pokud uvážíme kotouč s číslem $2^x3^y5^z$, pak počet jeho násobků včetně kotouče samotného můžeme vyjádřit vzorcem $(10 - x)(10 - y)(10 - z)$.

Kotouč je v původní pozici A, pokud je výraz dělitelný čtyřmi. Vyjádříme tedy počet kotoučů, jejichž výraz není dělitelný čtyřmi a odečteme od celku.

Pokud požadujeme, aby výraz nebyl dělitelný čtyřmi, tak buď je každý činitel lichý $\{1; 3; 5; 7; 9\}$, tedy 5^3 možností nebo je jeden z nich dělitelný dvěma, ale ne čtyřmi $\{0; 2; 6\}$, to je $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ možností.

Dohromady to je 350 a tedy kotoučů, co je na konci v pozici A, je 650.

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.
www.generaceY.cz; www.reformy-msmt.cz

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GENERACE
TECHNICKÉ A PŘÍRODOVĚDNÉ VZDĚLÁVÁNÍ
ZÁŽITEK S BONUSEM → KARIÉRY → PRESTIŽE → ZAJIŠTĚNÍ
www.generaceY.cz

BRKOS Team 2013