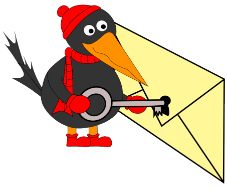
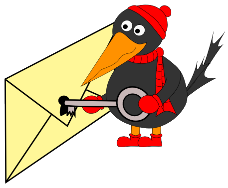


Řešení 3. série

Posloupnosti

autor: *Moutes a Stopa*



Úloha 3.1. Kouma posedával ve svém pokoji a snažil se přijít na jednu posloupnost. Neměl ale zrovna svůj den, a tak chvílemi jen tak koukal z okna a doufal, že ho u toho něco napadne. A jak tak koukal, všiml si, že mu přímo před oknem roste opravdu zajímavý strom. Jeho kmen má délku jedna a poté se rozděluje na dvě větve délky $\frac{1}{3}$, které se dělí každá zase na dvě větve třetinové délky, atd. až poslední větvičky mají délku $\frac{1}{3^{2013}}$. Při tomto zjištění okamžitě zapomněl na svůj původní problém a místo toho se snažil zjistit, jaká je celková délka všech větví na stromě včetně kmene. Ulevilo se mu, když zjistil, že je to pro něj hračka. Kolik dohromady měřily všechny větve a kmen Koumova stromu?

Řešení. Jako generaci stromu označíme počet rozvětvení od kmene. Kmen je tedy generace 0, další dvě větve generace 1, atd. Potom větve n-té generace mají každá délku $\frac{1}{3^n}$ a tedy koncové větvičky jsou 2013-té generace. Navíc je v $n+1$ generaci dvakrát více větví než v generaci n a v generaci 0 je jedna větev. Platí tedy, že v generaci n je 2^n větví. Celková délka všech větví v generaci n je tedy $2^n \cdot \frac{1}{3^n} = \frac{2^n}{3^n}$. Zbývá to jen všechno sečíst přes všechny generace. Výsledná délka stromu je tedy:

$$
\begin{aligned}
d &= \frac{2^0}{3^0} + \frac{2^1}{3^1} + \cdots + \frac{2^{2013}}{3^{2013}} \\
d \cdot \frac{2}{3} &= \frac{2^1}{3^1} + \frac{2^2}{3^2} + \cdots + \frac{2^{2013}}{3^{2013}} + \frac{2^{2014}}{3^{2014}} \\
d \cdot \frac{2}{3} + \frac{2^0}{3^0} &= \frac{2^0}{3^0} + \frac{2^1}{3^1} + \frac{2^2}{3^2} + \cdots + \frac{2^{2013}}{3^{2013}} + \frac{2^{2014}}{3^{2014}} \\
d \cdot \frac{2}{3} + 1 - d &= \frac{2^{2014}}{3^{2014}} \\
d \cdot \left(\frac{2}{3} - 1\right) &= \frac{2^{2014}}{3^{2014}} - 1 \\
d &= 3 \cdot \left(1 - \frac{2^{2014}}{3^{2014}}\right)
\end{aligned}
$$

Úloha 3.2. A nad čím to Kouma předtím vlastně koumal? Chtěl najít geometrickou posloupnost splňující rekurentní vztah $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $a_1 = 1$. Dokázali byste mu poradit?

Řešení. Posloupnost musí být geometrická. Tedy existuje nějaké reálné číslo q takové, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $a_{n+1} = qa_n$. Mimoto také samozřejmě platí $a_{n+2} = qa_{n+1} = q^2 a_n$. Dosazením do vztahu $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ získáme $q^2 a_n = 2qa_n + a_n$. Tento vztah musí být splněn pro všechna n, tedy speciálně také pro $n = 1$. Navíc platí $a_1 = 1$ a tedy $q^2 = 2q + 1$. Řešením této kvadratické rovnice získáme dva kvocienty $q_1 = 1 + \sqrt{2}$ a $q_2 = 1 - \sqrt{2}$.

BRKOS Team 2013

Ověříme, že obě posloupnosti $a_{n+1} = (1+\sqrt{2})a_n$ i $a_{n+1} = (1-\sqrt{2})a_n$ vyhovují zadání a jsme hotovi.

Úloha 3.3. Zato u Klevrových už se zase slaví. Tentokrát je s narozeninami na řadě Matěj, a tak se Liběnka vytáhla a upekla mu třípatrový čokoládový dort. Na horní patro postavila do kruhu n svíček a nemohla se dočkat, až ho Matěj ochutná. Ale nebyl by to Matěj, kdyby ji nechtěl trochu poškádlit, a tak se rozhodl to trochu pozdržovat. Vždy jednu svíčku vynechal a další sfoukl a takto postupoval, dokud nesfoukl všechny svíčky. Liběnka si aspoň ukrátila tu dlouhou chvíli tím, že si mezitím spočítala, kterou svíčku Matěj sfoukne jako poslední. Která to byla, jestliže se začínalo u první svíčky? (Tedy první sfouknutá svíčka byla druhá.)

Řešení. Označme první svíčku α_1, druhou α_2 atd., až poslední α_n. Pak hledáme k_n index svíčky, která bude sfouknutá jako poslední. Předpokládejme, že známe index k_{n-1} svíčky, která by byla sfouknutá jako poslední, kdyby svíček bylo $n-1$. Matěj tedy první svíčku vynechá, sfoukne druhou, ale najednou už hoří jen $n-1$ svíček, jen tentokrát Matěj začíná u třetí svíčky. Položme tedy $\beta_1 = \alpha_3$, $\beta_2 = \alpha_4$ atd., až nakonec $\beta_{n-2} = \alpha_n$ a $\beta n - 1 = \alpha_1$. Vidíme, že pro všechny β vyjma β_{n-1} platí $\beta_i = \alpha_{i+2}$. Zřejmě tedy poslední sfouknutá svíčka je $\beta_{k_{n-1}}$ a pokud $k_{n-1} \neq n-1$, $\beta_{k_{n-1}} = \alpha k_{n-1} + 2$ a tedy $k_n = k_{n-1} + 2$. Podívejme se nyní, jak bude sfouknutí vypadat, když bude svíček 2^t ($t \in \mathbb{N}$). Pak vždy než se Matěj dostane znovu k první svíčce, sfoukne všechny svíčky, které mají sudé pořadí. Nicméně jich poté zbude polovina, tedy 2^{t-1} a první svíčku Matěj opět vynechává. Opětovnou aplikací této úvahy dojdeme až ke dvěma svíčkám a nakonec poslední, která zůstane je svíčka první. Proto $k_{2^t} = 1$. Nyní najděme celá čísla a, b tak, aby $n = 2^a + b$ a zároveň $b < 2^a$. Taková čísla zcela jistě existují. Pak dle vztahu $k_n = k_{n-1} + 2$ platí $k_n = k_{2^a} + 2b = 2b + 1$, pokud platí $n - 1 > 2b - 1$. To však platí, neboť $b < 2^a$, tedy $2b < 2^a + b = n$. Tím je úloha vyřešena.

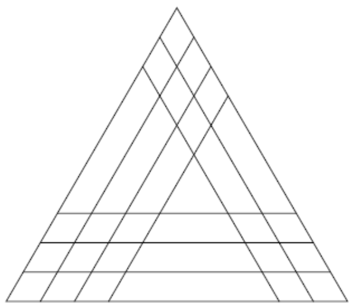
Úloha 3.4. Henry pobaveně sledoval, jak je Liběnka nedočkavá, a tak si dával s krájením taky na čas. A jak tak krájel, napadl ho zajímavý příklad a hned se o něj s dětmi podělil: „Děti, na kolik nejvýše částí můžete rozřezat rovnostranný trojúhelník 2013 řezy rovnoběžnými s jeho stranami?“ A víte to vy?

Řešení. Většina správných řešení spočítala počet oblastí pomocí počtu průsečíků řezů a pak nějak dokazovala, že počet těchto průsečíků je maximální, když vedeme každou stranou stejný počet řezů. Zde uvedu jiné řešení, které se inspirovalo řešením *Adély Miklíkové* (která však bohužel myšlenku nedotáhla do konce). Na začátek několik předpokladů:

- Nemá smysl vést řez mimo dort. (Zřejmé)
- Nemá smysl ukončit řez uvnitř dortu. (Zřejmé)
- Nemá smysl řezat tam, kde už jsme dřív řezali. (Zřejmé)
- Nemá smysl vést více jak dva řezy jedním bodem. (Zřejmé)
- Když nějaký řez přemístíme (tedy řízneme jinde) blíže ke straně, se kterou je rovnoběžný, počet částí se nesníží. To vyplývá z „průsečíkové“ úvahy. Řez přidá tolik nových částí, kolik protne už existujících řezů plus jedna (neboť na tolik je rozdělen úseček). Je-li řez „blízko“ vrcholu proti straně, se kterou je rovnoběžný, mohlo by se stát, že nějaký řez „mineme“. Avšak zřejmě lze vždy přemístit řez tak blízko příslušné straně, aby protľal všechny řezy, jež s ním nejsou rovnoběžné.

- Uvažme nyní, že všechny řezy vedeme „blízko“ příslušným stranám. Tedy uvnitř se nám vytvoří jakýsi trojúhelník podobný tomu výchozímu.
- S každou stranou je rovnoběžný, alespoň jeden řez. Pokud by tomu tak nebylo, řekněme, že s dalšími dvěma stranami je rovnoběžných a a b řezů, přičemž $a \geq b$. Pak odstraněním jednoho z a řezů nám zmizí $b + 1$ oblastí. Přidáním nového řezu rovnoběžného s dosud „nevyužitou“ stranou vznikne $a - 1 + b + 1 = a + b$ nových oblastí. Tedy touto změnou se počet oblastí zvýšil o $a - 1$, což je jistě kladné.

Nyní tedy máme situaci podobnou této:



Označme počet částí na obvodu dortu v závislosti na počtu řezů jako o_n. Pak určitě platí, že $o_n = 2n$. Navíc po snědení všech částí na obvodu nám zbude dort rozřezaný $n - 3$ řezy. Na ten se dají opět aplikovat výše zmíněná pravidla (zejména přemístění řezu v případě nerovnoběžnosti všech řezů s jednou stranou) a takto můžeme jíst po obvodu dortu, až nám nakonec zbude pouze jediná část. Výsledný maximální počet částí je tedy

$$1 + o_3 + o_6 + \cdots + o_{2013} = 1 + 6 + 12 + \cdots + 4026 = 1 + 6 \cdot (1 + 2 + \cdots + 671)$$
$$= 1 + 6 \cdot \frac{671 \cdot 672}{2} = 1352737.$$

Úloha 3.5. Nebyli bychom u Klevrů, kdyby mezi dárky nebyl i nějaký ten příklad. Matěj měl najít všechny funkce $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že $f(x + y) + y = f(x) + 2f(y)$ platí pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. A co kdyby takový dárek čekal na vás, zvládli byste ho vyřešit?

Řešení. Rovnice musí být splněna pro všechna reálná čísla, tedy zejména pro $x = y = 0$. Pak je $f(0) + 0 = f(0) + 2f(0)$ a tedy $f(0) = 0$. Dále nechť y je libovolné a $x = 0$. Pak $f(y) + y = f(0) + 2f(y)$ neboli $f(y) = y$ pro všechna reálná čísla y. Tato funkce je také jediným řešením dané rovnice (zřejmě rovnost splňuje).

Úloha 3.6. Dalším dárkem bylo mikádo. Ne že by na Matěje čekal nový sestřih, ale ta hra s tyčinkami. A Liběnka Matěje hned vyzvala na první kolo. Když už se zbavili skoro všech tyčinek a Matějovi bylo jasné, že už to má Liběnka v kapse, nenápadně začal: „Nevidíš v těch zbylých tyčinkách lichoběžník? A uměla bys dokázat tohle?“ Nechť $ABCD$ je lichoběžník se základnami AB a CD. Přímka p je rovnoběžná s přímkou AB a protíná úsečku BC v bodě E a úsečku AD v bodě F. S je střed úsečky CD. Přímka SE protíná přímku AB v bodě X, přímka SF protíná přímku AB v bodě Y. Dokažte, že $|AY| = |BX|$.

Řešení. Úhel $\sphericalangle SEC$ (resp. $\sphericalangle SFD$) je vrcholový k $\sphericalangle BEX$ (resp. $\sphericalangle AFX$). Podobně úhel $\sphericalangle SCE$ (resp. $\sphericalangle SDF$) je střídavý s úhlem $\sphericalangle XBE$ (resp. $\sphericalangle YAF$). Proto $\Delta SCE \sim \Delta XBE$ (resp. $\Delta SDF \sim \Delta YAF$). A zejména tedy $\frac{|FY|}{|SF|} = \frac{|AY|}{|SD|}$ a $\frac{|EX|}{|SE|} = \frac{|BX|}{|SC|}$. Podobně se pomocí souhlasných úhlů ukáže $\Delta ESF \sim \Delta XSY$. Proto platí

$$\begin{aligned} \frac{|SY|}{|SF|} &= \frac{|SX|}{|SE|} \\ \frac{|SF|+|FY|}{|SF|} &= \frac{|SE|+|EX|}{|SE|} \\ \frac{|FY|}{|SF|} &= \frac{|EX|}{|SE|} \\ \frac{|AY|}{|SD|} &= \frac{|BX|}{|SC|} \\ |AY| &= |BX|, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat.

Úloha 3.7. Matěj už si spokojeně odpočíval v křesle a projídal se svou narozeninovou bonboniérou, když na jejím dně uviděl poslední překvapení. Byl to zmuchlaný papírek, na kterém stálo: Dokažte, že pro každá **tři kladná reálná čísla** a, b, c, **pro která jsou všechny odmocniny definovány** platí:

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{4-b+a} + \sqrt{9-c+b} + \sqrt{16+c} \leq 10.$$

Zvládli byste to s takhle přecpaným břichem vy?

Řešení. Toto řešení poslal *Mark Karpilovskij*. Nejprve ukážeme, že pro dvě různá kladná reálná čísla x, y platí nerovnost

$$\begin{aligned} \frac{\frac{x}{y}+y}{2} &\geq \sqrt{x} \\ \left(\frac{x}{y}+y\right)^2 &\geq 4x \\ \frac{x^2}{y^2} + 2x + y^2 &\geq 4x \\ \frac{x^2}{y^2} - 2x + y^2 &\geq 0 \\ \left(\frac{x}{y}-y\right)^2 &\geq 0, \end{aligned}$$

což zcela jistě platí. Nyní uvažme tuto nerovnost pro dvojice (x, y) tvaru $(1-a, 1)$, $(4-b+a, 2)$, $(9-c+b, 3)$, $(16+c, 4)$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1-a}{1}+1}{2} &\geq \sqrt{1-a} \\ \frac{\frac{4-b+a}{2}+2}{2} &\geq \sqrt{4-b+a} \\ \frac{\frac{9-c+b}{3}+3}{2} &\geq \sqrt{9-c+b} \\ \frac{\frac{16+c}{4}+4}{2} &\geq \sqrt{16+c} \end{aligned}$$

Sečtením všech těchto nerovností získáme

$$\frac{1 - a + \frac{4-b+a}{2} + \frac{9-c+b}{3} + \frac{16+c}{4}}{2} \geq \sqrt{1-a} + \sqrt{4-b+a} + \sqrt{9-c+b} + \sqrt{16+c}$$
$$10 - a\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) - b\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) - c\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) \geq \sqrt{1-a} + \sqrt{4-b+a} + \sqrt{9-c+b} + \sqrt{16+c}$$

Levá strana nerovnosti je 10 zmenšené o kladné číslo, tedy je zcela jistě menší než 10 a tudíž i pravá strana je menší než 10, což jsme chtěli dokázat.

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

www.generaceY.cz; www.reformy-msmt.cz

evropský sociální fond v ČR

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

GENERACE

TECHNICKÉ A PŘÍRODOVĚDNÉ VZDĚLÁVÁNÍ

ZÁŽITEK S BONUSEM → KARIÉRY → PRESTIŽE → ZAJIŠTĚNÍ

www.generaceY.cz

BRKOS Team 2013