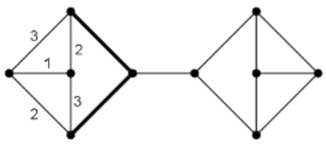
Řešení 2. série

Grafy

autor: *Baci a Bori*

Úloha 2.1. Henry namaloval Liběnce k narozeninám znamenitý obrázek. Byly na něm barevné úsečky potkávající se v několika různých bodech. Z každého bodu vedly tři úsečky, které navíc byly vždy různobarevné. Henry použil při malování čtyři barvy a dušoval se, že s méně barvami by to nesvedl. Zvládli byste také nakreslit takový obrázek, pokud víte, že Henry použil méně než 16 bodů?

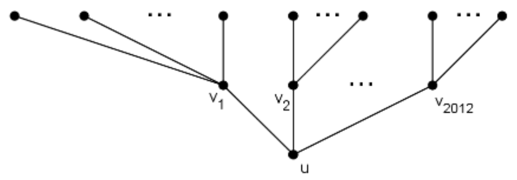
Řešení. Úloha je argumentačně velmi jednoduchá. Stačí si uvědomit, co po nás zadání vlastně chce. Máme najít 3-regulární graf na nejvýše 16 vrcholech, který je 4-hranově-obarvitelný, ale není 3-hranově obarvitelný. Nalézt takový graf je snadné, jeden ukázkový na 10 vrcholech přikládáme. Jeho 3-regularita je zřejmá, nemá výše než 16 vrcholů a lehce předvedeme 4-hranové-obarvení. Nyní stačí jednoduše argumentovat, proč graf není 3-hranově obarvitelný. Dokážeme sporem. Klíčové pozorování je u dvou trojúhelníků nalevo. Každé obarvení trojúhelníka musí vypadat tak, že na hranách jsou tři různé barvy. Vidíme, že trojúhelníky jsou spojené hranou, takže po obarvení jednoho z nich je už obarvení druhého fixní. Nyní si všimneme, že ze dvou vrcholů, které trojúhelníky nesdílí, vedou dvě hrany do třetího vrcholu. Tyto hrany však nutně musí mít stejnou barvu. To je spor.



Úloha 2.2. Matějovi se jedné noci zdál strašlivý sen, ve kterém spatřil 2012-regulární graf na 1234567 vrcholech, jenž neobsahoval žádnou kružnici délky 4. Po probuzení jej však Liběnka uklidňovala slovy, že žádný takový graf neexistuje. Byl to opravdu jen sen? Zdůvodněte.

Řešení. Tato úloha se na první pohled může jevit jako grafová, ale ve skutečnosti je v ní jen rafinovaně ukrytý Dirichletův princip. Uvažujme nějaký jeden konkrétní vrchol u tohoto grafu na 1234567 vrcholech. Víme, že jeho stupeň je 2012, tedy vede z něj 2012 hran do vrcholů $v_1, v_2, \ldots, v_{2012}$. Podívejme se nyní na těchto 2012 vrcholů. Víme, že z každého vrcholu musí vést 2011 dalších hran. Celkem jich tedy povede $2012 \cdot 2011$. Nejvýše jedna z nich může opět skončit mezi vrcholy $v_1, \ldots, v_{2012}$, neboť v opačném případě by vznikl cyklus délky 4. Z celé této „úrovně“ tedy povede výše alespoň $2012 \cdot (2011 - 1)$ hran. Nyní je klíčové uvědomit si, že každá z těchto hran musí vést do nového vrcholu. Kdyby totiž dvě vedly do stejného vrcholu, vznikl by okamžitě cyklus délky 4. Graf tedy musí mít nutně aspoň $1 + 2012 + 2012 \cdot (2011 - 1) = 4046133$ vrcholů, což je bezpečně více než 1234567. Dostáváme tedy spor.

BRKOS Team 2012



Úloha 2.3. Jednoho rána Matěj poslal Henrymu zprávu s následujícím textem: Myslím, že každý souvislý graf obsahující k vrcholů lichého stupně lze rozložit na $\frac{k}{2}$ sledů, **v nichž se hrany nemohou opakovat** tak, aby každá hrana byla v právě jednom z nich, ale neumím to dokázat. Henry se zamyslel a už mu psal odpověď. Jak byste Matějovi poradili vy?

Řešení. Uvážme ľubovoľný graf G obsahujúci k vrcholov lichého stupňa. Nakoľko súčet stupňov všetkých vrcholov v grafe musí byť sudý (ide totiž o dvojnásobok počtu hrán), počet vrcholov lichého stupňa k musí byť tiež sudý. Následne budeme postupovať matematickou indukciou vzhľadom k hodnote $\frac{k}{2}$. Ak je táto hodnota rovná jednej, teda $k = 2$, ide o graf s dvoma vrcholmi nepárneho stupňa - o takom grafe vieme, že v ňom existuje otvorený Eulerovský ťah prechádzajúci práve raz všetkými hranami. Predpokladajme teraz platnosť výroku pre hodnoty $\frac{k}{2}$ menšie než nejaké n a dokážeme platnosť výroku pre $\frac{k}{2} = n$. V grafe kde $\frac{k}{2} = n$ nájdeme nadlhší ťah vedúci medzi dvoma vrcholmi lichého stupňa (taký ťah určite existuje). Ak hrany tohto ťahu z grafu odstránime, zostane nám graf (nie nutne súvislý, v každej komponente súvislosti však budú aspoň dva vrcholy nepárneho stupňa - inak by ťah nebol najdlhší), ktorý obsahuje presne $k-2$ vrcholov lichého stupňa (odstránením ťahu sme znížili lichý stupeň začiatočného a koncového vrcholu o liché číslo a stupňe všetkých ostatných vrcholov o nejaké sudé číslo). Tým pádom v každej komponente, ktorá nám zostane, bude nová hodnota $\frac{k}{2}$ určite menšia než n, z indukčného predpokladu teda vieme nájsť prislúchajúce rozdelenia na ťahy tak, aby dokopy spolu s ťahom, ktorý sme odstránili, bolo všetkých ťahov $\frac{k}{2}$.

Úloha 2.4. Matěj s Liběnkou navštívili o víkendu Muzeum Petra Hliněného, ve kterém právě probíhala expozice rovinných grafů s více než 4 vrcholy, avšak bez jediného trojúhelníku. Matěje ihned zaujalo, že každý z vystavených grafů obsahoval aspoň 4 vrcholy stupně méně než 4. Platí to obecně? Proč?

Řešení. Důkaz rozdělíme na dvě části. Nejprve zkusíme nějak odhadnout počet hran vzhledem k počtu vrcholů a komponent souvislosti. V dalším textu budeme označovat počet vrcholů jako v, počet hran jako e, počet stěn jako f a počet komponent souvislosti jako c.

V pomocném textu byl uveden Eulerův vztah pro souvislé grafy. Pro nesouvislé grafy vypadá velmi podobně, a sice $v + f = e + c + 1$. Dále víme, že náš graf neobsahuje žádný trojúhelník, a proto musí platit $f \leq \frac{2e}{4}$ (neboť každá hrana je přilehlá nejvýše dvou stěnám a každá stěna obsahuje aspoň čtyři hrany). Dáme tyto dva vztahy dohromady a obdržíme klíčovou nerovnost

$$2e \leq 4v - 4c - 4.$$

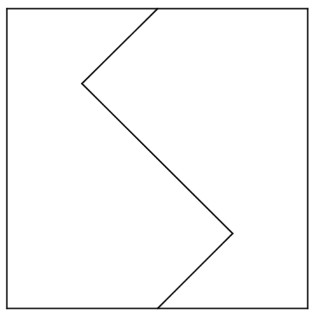
Nyní přistoupíme k druhé části důkazu. Budeme sporem dokazovat tvrzení úlohy za použití dokázané nerovnosti. Předpokládejme, že v grafu jsou nejvýše 3 vrcholy stupně méně než 4. Povšimněme, že $2e$ je přesně součet stupňů všech vrcholů. Víme, že tento součet musí být aspoň $4(v - 3)$. Pro zjednodušení položme $2e = 4(v - 3) + x$, kde x je nějaký zbytek (tj. součet stupňů našich nejvýše tří vrcholů a rozdíl u vrcholů stupně aspoň 4). Dosaďme nyní do naší nerovnosti.

Získáváme $x \leq 8-4c$. Rozebereme nyní případy vzhledem k počtu komponent (velikosti c). Případ $c = 0$ není zajímavý, neboť víme, že graf obsahuje aspoň 4 vrcholy, tedy $c \geq 1$. Dále $c \geq 3$ vede k zápornosti x, což není možné. Zbývají nám dva zajímavé případy $c \in \{1, 2\}$.

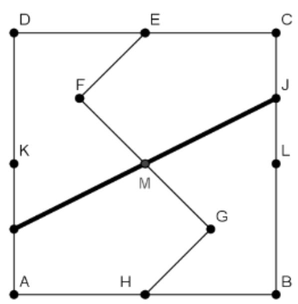
Pokud $c = 2$, pak $x = 0$ a tedy $c \geq 4$. Spor.

Pokud $c = 1$, pak $x = 4$. Nyní už není těžké argumentovat, neboť je třeba si uvědomit, že v x musí být stupně našich nejvýše 3 vrcholů, současně ale hrany vedoucí z těchto vrcholů končí v některých jiných vrcholech grafu a netvoří novou stěnu, tedy v tomto x musejí být započítány dvakrát. Úplně korektní důkaz necháváme za cvičení čtenáři, což by ale v tomto momentu už nemělo být obtížné.

Úloha 2.5. Liběnka upekla buchtu o šířce i délce 40 cm a řekla Matějovi, aby ji rozdělil na půlky. Matěj to splnil šalamounsky a rozdělil buchtu podle obrázku (viz příloha), všechny úseky lomené čáry svírají se stranami čtverce úhel 45° a zlomy jsou 10 cm od okraje. Poraďte Liběnce, jak má teď jedním *přímým* řezem rozdělit buchtu na čtvrtiny.



Řešení. Buchtu rozrežeme podľa obrázka (Bod J je vzdialený 10 cm od C a bod I 10 cm od A). Trojuholník EFM má zrejme obsah 100 cm^2, rovnako trojuholníky KMI a MLJ. Štvorce $KMED$ a $MLCE$ majú obsah 400 cm^2. Päťuholniky $DIMFE$ a $MJCEF$ teda budú mať rovnaký obsah $400 - 100 + 100 = 400cm^2$. To isté kvôli symetrii platí pre päťuholníky $AHGMI$ a $HBJMD$. Zobrazený rez teda buchtu rozdeľuje na štvrtiny.



Úloha 2.6. Henry si o víkendu na algebraických trzích koupil dvě kladná reálná čísla a, b, jejichž součin nebyl větší než 1. Matějovi jeho nákup přišel marnotratný, dokud mu

Henry nevysvětlil, co všechno se s takovými čísly dá dělat. Např. se o nich dá tvrdit, že $(1+\frac{1}{a})(1+\frac{1}{b}) \geq 4$. Jak byste to dokázali?

Řešení. Povedeme přímý důkaz. Vyjděme z triviálního vztahu, který říká, že čtverec libovolného čísla je nezáporný. Tento dále upravujme.

$$(a-1)^2 \geq 0 \tag{2.1}$$

$$a^2 - 2a + 1 \geq 0 \tag{2.2}$$

$$a^2 + 1 \geq 2a \tag{2.3}$$

$$a + \frac{1}{a} \geq 2 \tag{2.4}$$

Dodejme, že poslední úpravu (dělení číslem a) jsme mohli provést, neboť a je nezáporné, zejména tedy nenulové. Ze zadání víme, že $ab \leq 1$, tedy (opět můžeme dělit) $a \leq \frac{1}{b}$. Vzhledem k tomu, že platí vztah (2.4), tím spíše bude platit i vztah (2.5).

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} \geq 2 \tag{2.5}$$

Dále ze zadání víme, že $\frac{1}{ab} \geq 1$. Současně triviálně $1 \geq 1$. Můžeme tyto dvě nerovnosti sečíst s (2.5) a dále už pouze jednoduchým vytknutím docházíme ke vztahu (2.7), který jsme potřebovali dokázat.

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{ab} + 1 \geq 4 \tag{2.6}$$

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right) \geq 4 \tag{2.7}$$

Úloha 2.7. Liběnka dostala k narozeninám zvláštního psa, který se stravoval výhradně racionální výživou. Každé jeho jídlo se skládalo ze tří zlomků $\frac{r}{q} < \frac{a}{b} < \frac{p}{s}$ s přirozenými čitateli i jmenovateli, jež navíc musely splňovat podmínku $pq - rs = 1$. Liběnka zjistila, že čím menší je hodnota b, tím více jejímu mazlíčkovi chutná. **Jsou-li dána p,q,r,s splňující výše uvedené vztahy, jaká je nejmenší možná hodnota b?**

Řešení. Z prvej zadanej nerovnosti máme:

$$aq - rb > 0$$

Keďže pracujeme s prirodzenými číslami, môžme pokračovať v úpravách:

$$aq - rb \geq 1$$

$$aqs - rbs \geq s$$

Analogicky z druhej zadanej nerovnosti:

$$pbq - asq \geq q$$

Sčítaním týchto dvoch nerovníc:

$$aqs - rbs + pbq - asq \geq s + q$$

$$b(pq - rs) \geq s + q$$

Keďže podľa zadania $pq - rs = 1$:

$$b \geq s + q$$

Získali sme tak dolnú hranicu pre b, stačí overiť, že ak b bude rovné $s+q$, existuje prirodzené a tak, aby zadané nerovnosti platili. To urobíme ľahko - položíme $a = p+r$. Keď dosadíme tieto hodnoty a, b do oboch zadaných nerovností, ekvivalentnými úpravami prídeme k záveru $0 < pq - rs = 1$, ktorý je pravdivý.

Tato aktivita je realizována v rámci veřejné zakázky Pilotní ověření systému popularizace technických a přírodovědných oborů vytvářením vazeb vysokých škol na školy nižších stupňů, která je součástí IPN Podpora technických a přírodovědných oborů (PTPO), reg.č. CZ.1.07/4.2.00/06.0005. Projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.
www.generaceY.cz; www.reformy-msmt.cz