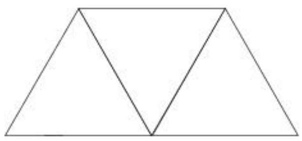
Řešení 1. série

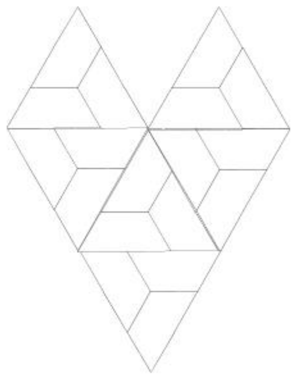
Úvodní guláš

autor: *Mari a Roman*

Úloha 1.1. Kouma a Ňouma hráli v matematické soutěži mozaiku. Zatímco Kouma se zběsile vrhnul do skládání všemožných obrazců, Ňouma začal postupně vybírat všechny lichoběžníky mající rozměry jako na obrázku. Po chvíli si toho Kouma všiml a zeptal se Ňoumy, zda by dokázal svými lichoběžníky pokrýt tvar připomínající kornout s dvěma kopečky zmrzliny (viz obrázek). Může to Ňouma zvládnout?

Řešení. Nakreslený „kornout se zmrzlinou“ můžeme rozdělit na čtyři rovnostranné trojúhelníky o straně délky tři. Každý takovýto trojúhelník můžeme pokrýt zadanými lichoběžníky, tedy můžeme pokrýt i celý „kornout“. Řešení je ještě zřetelnější, když si každý lichoběžník rozdělíme na tři rovnostranné trojúhelníky.





Úloha 1.2. Matěj a Henry píšou společně číslo $ABCDEFGHIJKLMNO$, v němž jednotlivá písmena představují číslice od 0 do 9 (A není nula). Domluvili se, že postupně vznikající čísla musí být dělitelná čísly 3, 4, 5, 9 podle následující tabulky

dělitelé	číslo	dělitelé	číslo	dělitelé	číslo
3	A	3, 5	$ABCDEF$	3, 4, 5	$ABCDEFGHIJK$
4	AB	3, 9	$ABCDEFG$	3, 4, 9	$ABCDEFGHIJKL$
5	ABC	4, 5	$ABCDEFGH$	3, 5, 9	$ABCDEFGHIJKLM$
9	$ABCD$	4, 9	$ABCDEFGHI$	4, 5, 9	$ABCDEFGHIJKLMN$
3, 4	$ABCDE$	5, 9	$ABCDEFGHIJ$	3, 4, 5, 9	$ABCDEFGHIJKLMNO$

Tedy 3 dělí A, 3 a 4 dělí $ABCDE$ a tak dále. Zároveň si řekli, že žádné z čísel nebude dělitelné 100. Po půl hodině marného vymýšlení se začnou navzájem obviňovat, že to jeden druhému sabotuje. Liběnka, která pozoruje chlapce už od začátku se začne náramně smát a povídá: „A víte vůbec, jestli takové číslo existuje? Já myslím, že na jednom místě se určitě zaseknete.“ Zjistíte, kterou číslici již nemohou připsat do čísla, aby platila daná pravidla?

BRKOS Team 2012

Řešení. Číslo $ABCD$ (např. 3609) musí být dělitelné devíti, tudíž i třemi, následující číslice E musí tedy být násobkem tří, aby tuto dělitelnost zachovala, zároveň však musí být i sudá, z čehož plyne, že $E = 0$ nebo $E = 6$ (v našem příkladu $E = 6$). Po přidání čísla F musí zůstat dělitelnost třemi zachována, pročež musí být F společným násobkem čísel 5 a 3, což znamená $F = 0$. Aby zůstala splněna podmínka nedělitelnosti stem, musí být $E = 6$. Podívejme se na číslo $ABCDEFG$. Musí platit $9|A+B+C+D+E+F+G$, víme, že $9|A+B+C+D$ tudíž musí platit $9|E+F+G$, čemuž vyhovuje pouze $G = 3$. Číslo H musí být násobek pěti a zároveň sudé, nezbývá než $H = 0$, teď jsme však vytvořili číslo $ABCD6030$, které není dělitené čísly 4 a 5 zároveň. Z předchozího popisu je zřejmé, že čísla E, F, G jsme nemohli volit jinak, takže se Henry s Matějem zaseknou na číslici H.

Úloha 1.3. Starosta Hloupětína uspořádal pro své obyvatele taneční večírek. Očekával obrovskou účast, ale nakonec se dostavily jen tři manželské páry. Každý z účastníků přinesl nějaký dárek pro hostitele, ale když je chtěli předat, pronesl starosta: „Já žádné dárky nechci, rozdejte si je radši mezi sebou.“ Kouma, který na večírku roznášel zázvorovou limonádu, začal přemýšlet nad tím, kolika způsoby si můžou dárky rozdat tak, aby nikdo neměl svůj dárek ani dárek od své manželky. Poradíte Koumovi?

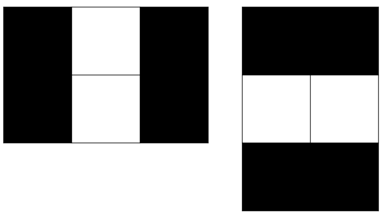
Řešení. Postavme hosty do kruhu, tak, aby vždy manžel s manželkou stáli vedle sebe. Nyní můžeme rozlišit dva způsoby, jakým si dárky předají:

a) Jedna dvojice dá oba své dárky druhé dvojici, ta pak nemá jinou možnost, než dát oba své dárky třetí dvojici. U každého předání mohou nastat dvě situace- žena dá dárek ženě a muž muži nebo naopak, celkem tedy $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ možností. Zároveň si mohou vybrat, zda budou dárky posílat po nebo proti směru hodinových ručiček. Celkem $2 \cdot 8 = 16$ možností

b) Každý z dvojice dá svůj dárek do jiné dvojice, přičemž buď pošle žena dárek po směru a muž proti směru hodinových ručiček, nebo naopak. U všech tří párů to zatím dává $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ možností. Podobně je to u přijímání dárků, buď přijme žena dárek zleva a muž zprava, nebo naopak, tj. Opět $2 \cdot 2 \cdot 2$ možností. Protože možnosti poslání a přijetí se navzájem nevylučují, dostáváme $8 \cdot 8 = 64$ možností.

Pokud chceme, aby žádný pár nedostal ani jeden svůj dárek, musí nutně nastat právě jeden z případů a), b). Dohromady nám to dává $16 + 64 = 80$ možností.

Úloha 1.4. Henry nadšeně přiběhnul za Matějem a Liběnkou s šachovnicí, která má 10×10 polí. Matěj se na šachovnici nelibě podíval a řekl: „Na šachy je to moc velké.“ „A pokrývání tetrominy už jsme tady měli,“ pronesla Liběnka. „Copak tetromina,“ zašklebil se Henry, „zkuste to pokrýt následujícími útvary.“ (Za pokrytá se považují pouze černá políčka, tzn. jeden útvar pokryje čtyři pole.)



Řešení. K důkazu, že šachovnici 10×10 nelze uvedenými tvary (v dalším tvary X) pokrýt použijeme obarvování. Obarvěme si napřed každý druhý sloupec černě, ostatní sloupce bíle. Tvary X mohou být situovány buď vodorovně nebo svisle, v prvním případě pokryje jeden tvar X čtyři černá (resp. bílá) pole, ve druhém případě vždy dvě černá a dvě bílá pole. Bílých a černých polí je stejně mnoho, tudíž musíme použít sudý počet vodorovně orientovaných tvarů X. Obarvíme-li nyní stejným způsobem řádky, zjistíme, že i svislých tvarů X musí být rovněž sudý počet. Počet všech použitých tvarů X je roven součtu vodorovných a svislých požitých tvarů X, tudíž je to nutně sudé číslo, jenže k tomu, abychom pokryli 100 polí je potřeba právě 25 tvarů X. Spor.

Úloha 1.5. Kouma a Ňouma si hráli s reálnými čísly. „Ňoumo, vymyslel jsem trojici čísel, která má takovouhle vlastnost: jestliže libovolné dvě z nich vynásobím a třetí k nim přičtu, dostanu pokaždé číslo 6006, to koukáš, viď?“ Ale Ňouma se nenechal zahanbit a odvětil: „To nic není, Koumo, právě jsem vymyslel jinou trojici čísel, jenž má tu tvoji vlastnost.“ Dokážete určit, o které trojice čísel se jedná? Čísla ve trojici nemusí být různá.

Řešení. Na túto úlohu postačí využiť tradičnú „zbraň“ v podobe odčítania (keďže pravá strana každej rovnice je rovnaká) každých dvoch rovníc. Po tejto úprave získame:

$$(b-a)(1-c)=0 \tag{1}$$
$$(c-a)(1-b)=0 \tag{2}$$
$$(b-c)(1-a)=0. \tag{3}$$

Celkom máme 2^3 možností ako zvoliť a, b a c, aby všetky rovnice popísané vyššie platili. Samozrejme niektoré podmienky môžu odporovať zadaniu úlohy alebo môžu sa opakovať, preto si rozoberieme všetky možnosti v nasledujúcej tabuľke:

(1)	(2)	(3)	riešenie
$a=b$	$a=c$	$b=c$	(a,a,a)
		$a=1$	$(1,1,1)$
	$b=1$	$b=c$	$(1,1,1)$
		$a=1$	$(1,1,c)$
$c=1$	$a=c$	$b=c$	$(1,1,1)$
		$a=1$	$(1,b,1)$
	$b=1$	$b=c$	$(a,1,1)$
		$a=1$	$(1,1,1)$

Zrejme trojica $(1,1,1)$ nesplňuje zadanie. Kedže rovnice sú cyklické uvážime napr. $(a,1,1)$, kde a je ľubovoľné reálne číslo. Dosadením do všetkých rovníc zadania máme $a+1=6006$, teda $a=6005$ a riešenia sú $(6005,1,1)$, $(1,6005,1)$ a $(1,1,6005)$. Konečne, uvážime riešenie (a,a,a), dosadíme do zadania a zistíme, že a je riešením $a^2+a=6006$, čo je kvadratická rovnica, ktorej riešenie ľahko najdeme napr. pomocou známych formuliek. Zrejme,

$$a_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+4.6006}}{2}=\frac{-1\pm155}{2}.$$

Teda posledné dve riešenia sú $(77,77,77)$ a $(-78,-78,-78)$. Celkovo máme 5 riešení prípadne 3, ak sa na riešenie „nepozeráme“ ako na usporiadanú trojicu.

Úloha 1.6. Henry slyšel hádanku Koumy a Ňoumy a řekl si, že musí taky něco vymyslet. „Liběnko,“ zeptal se po chvíli, „víš, že pro libovolná dvě celá čísla platí, že číslo ab^3-a^3b je dělitelné třemi?“ Liběnka si s úlohou poradila, zvládnete to taky?

Řešení. Celé čísla môžu dávať po delení tromi zvyšok 0, 1 a 2. Preto zapíšeme čísla a, b nasledovne: $a = 3k + p$ a $b = 3l + q$, kde k, l sú celé čísla a p, $q \in \{0, 1, 2\}$. Upravujme

$$\begin{aligned} ab^3 - a^3b = ab(b-a)(b+a) &= (3k+p)(3l+q)(3k+p-3l-q)(3k+p+3l+q) \\ &= (3k+p)(3l+q)(3(k-l)+(p-q))(3(k+l)+(p+q)). \end{aligned}$$

Celkovo po roznásobení máme 2^4 sčítancov, pričom každý sčitanec je deliteľný tromi až na $pq(p-q)(p+q)$. Zrejme, ak aspoň jedno z čísiel a, b je delitelné tromi (p alebo q je rovné 0), potom aj zadané číslo je deliteľné tromi. Teda nám ostáva 2^2 možností:

- ak $p = q$, potom $pq(p-q)(p+q) = 0$,
- ak $p \neq q$, potom $p + q = 3$, teda $pq(p-q)(p+q)$ je deliteľné tromi.

Úloha 1.7. „Myslím, že hádanek s celými čísly už bylo dneska dost," pronesl Matěj, „vymyslel jsem jednu, v níž hrají hlavní roli čísla reálná. Zkuste ukázat, že pro libovolné reálné číslo x platí $\cos(\sin x) > \sin(\cos x)$." Venku už se začalo stmívat, ale naši přátelé si řekli, že dokud úlohu nevyřeší, nepůjdou spát. Myslíte, že to zvládnou? A zvládnete to vy? (klidně se ale napřed vyspěte:))

Řešení. Funkcie $\cos x$ a $\sin x$ sú periodické s periódou 2π, preto nám stačí dokázať uvedenú nerovnosť na ľubovoľnom intervale dĺžky 2π. Dôkaz prevedieme pre $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$. Úlohu si rozdelíme na 4 prípady:

- $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$, potom $-\pi < -1 \leq \cos x < 0$, a preto $\sin(\cos x) < 0$. Tiež obmedzíme $\sin x$ nasledovne $-\frac{\pi}{2} < -1 < \sin x < 1 < \frac{\pi}{2}$, a teda $\cos(\sin x) > 0$. Celkovo $\sin(\cos x) < 0 < \cos(\sin x)$.
- $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, potom využijeme známu nerovnosť (špeciálny prípad Jordanovej nerovnosti) $0 < \sin x < x$ a faktu, že $\cos x$ je na uvedenom intervale klesajúca funkcia, preto $\cos(\sin x) > \cos x > \sin(\cos x)$.
- $x = 0$, potom $\cos(\sin 0) = \cos 0 = 1$ a $\sin(\cos 0) = \sin 1 < \sin\frac{\pi}{2} = 1 = \cos(\sin 0)$.
- $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, potom pre nejaké reálne y platí $\cos(\sin(-y)) = \cos(-\sin y) = \cos(\sin y)$ a $\sin(\cos(-y)) = \sin(\cos y)$. Keďže nerovnosť už bola dokázaná pre $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$, preto $\cos(\sin x) = \cos(\sin(-x)) > \sin(\cos(-x)) = \sin(\cos x)$.