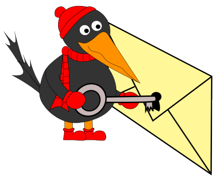
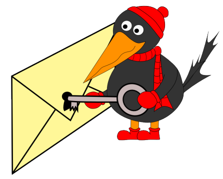


Řešení 6. série

Vektory

autor: *Mária a Zbyněk*



Úloha 6.1. Matěj se rozhodl, že si poskládá vlaštovku, ale ne jen tak obyčejnou, ale z papíru, který má tvar obecného konvexního šestiúhelníku. Vrcholy papíru si označil po řadě A, B, C, D, E a F. Než se pustil do samotného skládání, narýsoval si na papír ještě těžiště trojúhelníků ABC, BCD, CDE, DEF, EFA a FAB (označil je po řadě A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 a F_1), kterými pak vedl sklady papíru. Liběnka ho přitom pozorovala a víc než samotné skládání ji zajímalo, proč je každa strana šestiúhelníka $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (před začátkem skládání) stejně dlouhá jako strana protější a proč jsou navíc tyto strany rovnoběžné.

Řešení. Těžištěm trojúhelníka ABC je bod $A_1 = \frac{A+B+C}{3}$, těžištěm BCD je bod $B_1 = \frac{B+C+D}{3}$. Vektor A_1B_1 je roven $\frac{B+C+D}{3} - \frac{A+B+C}{3} = \frac{D-A}{3}$. Dále $D_1 = \frac{D+E+F}{3}$ a $E_1 = \frac{E+F+A}{3}$, $E_1D_1 = \frac{D-A}{3}$. Vektory $\overrightarrow{A_1B_1}$ a E_1D1 jsou shodné, úsečky $\overrightarrow{A_1B_1}$ a $\overrightarrow{E_1D_1}$ jsou proto rovnoběžné a mají stejnou délku. Analogickou úvahou dokážeme shodnost a rovnoběžnost úseček B_1C_1 a F_1E_1 a úseček C_1D_1 a A_1F_1.

Úloha 6.2. Henry si řekl, že vlaštovky jsou pro děti a on že si vyrobí pořádný termovač nukleárů. Vzal svářečku a šel do sklepa. Vzal šest rovných trubek a svařil je k sobě konci a to tak, že začátek druhé byl svařen s koncem první v bodě P_1, konec druhé se začátkem třetí v P_2, a tak dál, až konec šesté se začátkem první v P_6. Na první pohled bylo zřejmé, že výsledný útvar není rovinný. Na druhý pohled jste si mohli všimnout, že P_1P_2 je rovnoběžné s P_4P_5, P_2P_3 s P_5P_6 a konečně P_3P_4 s P_6P_1. Uměli byste dokázat, že mají úsečky P_1P_4, P_2P_5 a P_3P_6 společný střed?

Řešení. Ze zadaných rovnoběžností plyne, že přímky P_1P_2 a P_4P_5 mají stený směr, $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_4P_5}$ je jejich společným směrovým vektorem. Déle označíme směrové vektory zbylých dvou dvojic přímek $\vec{v} = \overrightarrow{P_2P_3} + \overrightarrow{P_5P_6}$ a $\vec{w} = \overrightarrow{P_3P_4} + \overrightarrow{P_6P_1}$. Součet všech vektorů $\overrightarrow{P_1P_2}$, $\overrightarrow{P_2P_3}$,... $\overrightarrow{P_6P_1}$ musí být nulový, proto $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Kdyby všechny vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ a $\vec{w}$ byly nenulové, byl by jeden (až na znaménko) roven součtu zbylých, ležel by s nimi tedy v rovině a celý útvar by byl rovinný. Pokud by byl nulový pouze jeden z vektorů, zbylé dva by byly až na znaménko stejné, čtyři z přímek by měly stejný směr a útvar by byl opět rovinný. Proto musí platit $\vec{u} = \vec{v} = \vec{w} = \vec{0}$, tedy $\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{P_4P_5}$, $\overrightarrow{P_2P_3} = -\overrightarrow{P_5P_6}$, $\overrightarrow{P_3P_4} = -\overrightarrow{P_6P_1}$. Střed úsečky P_1P_4 je roven $S_1 = \frac{P_1+P_4}{2}$, střed P_2P_5 je $S_2 = \frac{P_2+P_5}{2}$. Vektor určený těmito středy je $\overrightarrow{S_1S_2} = \frac{P_2+P_5}{2} - \frac{P_1+P_4}{2} = \frac{\vec{u}}{2} = \vec{0}$. Body S_1 a S_2 proto splývají. Označíme-li S_3 střed P_3P_6, dostaneme, že $\overrightarrow{S_2S_3} = \frac{P_3+P_6}{2} - \frac{P_2+P_5}{2} = \frac{\vec{v}}{2} = \vec{0}$. Splývají proto všechny ti středy.

Úloha 6.3. Liběnka nechtěla zůstat pozadu a začala si skládat vlastní vlaštovku. Ona pro změnu použila kruhový papír. Uvnitř papíru si zvolila bod P a přehnula papír dvěma kolmými sklady, vedenými bodem P. První se protnul s okrajem papíru v bodech A a C, druhý v bodech B a D. Liběnka je nyní tuze zvědavá, jaká je množina bodů Q takových, že $APBQ$ je obdélník.

Řešení. Kružnici ohraničující papír označíme k, její střed S a poloměr r. Nejprve si uvědomíme, že $APBQ$ je rovnoběžník, takže vektory $\overrightarrow{AP}$ a $\overrightarrow{QB}$ jsou shodné, proto $Q = A+B-P$. Tuto rovnost zle psát jako $\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SP}$. Když akto upravenou rovnost skalárně vynásobíme samu se sebou, dostáváme

$$\overrightarrow{SQ}\cdot\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SP} - 2\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SP} - 2\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SP} + 2\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB} \tag{6.1}$$

. Z kolmosti úseček PA, PB máme $0 = \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB} = (\overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SP})\cdot(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SP})$, tedy

$$0 = \overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SP} - \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SP} - \overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}. \tag{6.2}$$

Odečtením dvojnásobku (6.2) od (6.1) máme

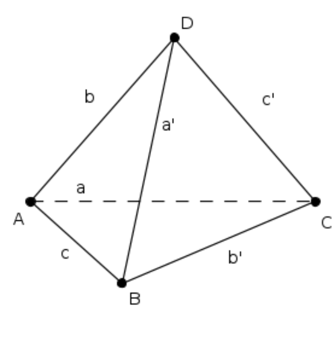
$$\overrightarrow{SQ}\cdot\overrightarrow{SQ} = \overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SP}\cdot\overrightarrow{SP}. \tag{6.3}$$

Použitím vztahu $u \cdot u = |u|^2$ máme $|\overrightarrow{SQ}|^2 = 2r^2 - |\overrightarrow{SP}|^2$, bod Q proto leží na kružnici se středem S a poloměrem $\sqrt{2r^2 - |\overrightarrow{SP}|^2}$.

Nyní chceme ukázat, že celá tato kružnice je hledanou množinou, tedy že na ní můžeme zvolit bod Q jakkoliv a vždy najdeme odpovídající body A, B. Bodem Q máme vždy určen bod $R = \frac{P+Q}{2} = \frac{A+B}{2}$. Bodem R povedeme kolmici k SR, její průsečíky s kružnicí k označíme A, B. Nyní potřebujeme dokázat, že takto nalezené bodytvoří spolu s body odpovídají zadání: tedy že $ABPQ$ tvoří obdélník. Že jde o rovnoběžník víme, neboť jsme body konstruovali tak, aby měly úsečky AB, PQ společný střed. Nyní zbývá dokázat, že jsou úsečky PA, PB kolmé, tedy že platí (6.2). Protože ale $A, B \in k$, platí 6.3 a protože je $APBQ$ rovnoběžník, platí (6.1). Rovnost (6.2) dostaneme odečtením (6.3) od (6.1) a vydělením dvěma, proto i tato rovnost platí a čtřúhelník $ABPQ$ je obdélníkem pro každý bod Q na kružnici $(S, \sqrt{2r^2 - |SP|^2})$.

Úloha 6.4. Henry zatím pokračoval ve svém kutilském díle. Další komponentou termovače, kterou si vyrobil, je čtyřstěn, jehož délky protějších hran tvoří dvojice (a, a'), (b, b'), (c, c'). Dokažte, že existuje trojúhelník o stranách $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$, který je ostroúhlý.

Řešení. Vrcholy čtyřstěnu označíme podle obrázku.



Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a + a' = \max\{a + a', b + b', c + c'\}$. Trojúhelníkové nerovnosti pro stěny pak dávají $b + c > a$, $b' + c' > a$, $b' + c > a'$, $b + c' > a'$, po sečtení a vydělení dvěma $b' + b + c' + c > a' + a$, což je přesně trojúhelníková nerovnost pro trojúhelník o stranách $a + a'$, $b + b'$, $c + c'$. Vzhledem k předpokladu maximality $a + a'$ to odtud plyne, že trojúhelník s danými stranami sestrojit lze.

Jak ale dokázat, že je ostroúhlý? Protože úhel menší než 180° je ostrý právě tehdy, když je jeho kosinus kladný, je náš trojúhelník podle kosinové věty ostroúhlý právě tehdy, když $(a + a')^2 \leq (b + b')^2 + (c + c')^2$.

Nejprve ukážeme

$$a^2 + a'^2 \leq b^2 + b'^2 + c^2 + c'^2. \tag{6.4}$$

Tuto nerovnost zapíšeme pomocí vektorů a ekvivalentně upravíme:

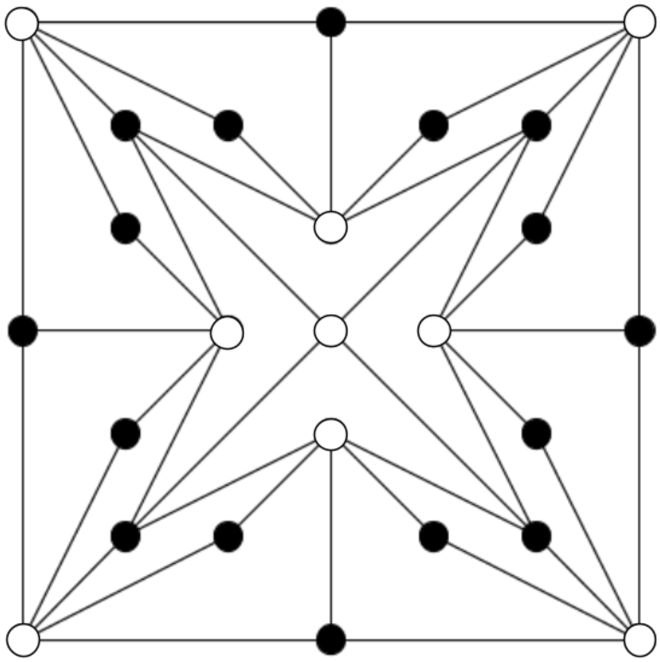
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{BD}^2 &\leq \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{CD}^2 \\
2\overrightarrow{AC}^2 + 2\overrightarrow{BD}^2 &\leq 2\overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{CD}^2 \\
(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})^2 + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 + (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})^2 + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})^2 &\leq 2\overrightarrow{AD}^2 + 2\overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{CD}^2 \\
\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} &\leq 0 \\
(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}) &\leq 0 \\
-(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD})^2 &\leq 0
\end{aligned}$$

Poslední nerovnost zřejmě platí, vzhledem k ekvivalentnosti úprav tak platí i nerovnost (6.4).

Nyní dokážeme nerovnost $aa' \leq bb' + cc'$. K důkazu této nerovnosti promítneme čtyřstěn do roviny rovnoběžné se stranami a a a'. Tyto dvě strany si v promítání délku zachovají, ostatní se zkrátí. Podle Ptolemaiovy věty je ve výsledném čtyřúhelníku součin úhlopříček menší než součet součinů protějších stran. Protože strany čtyřúhelníka jsou kratší, než jim odpovídající strany čtyřstěnu, nerovnost $aa' \leq bb' + cc'$ platí. Když k jejímu dvojnásobku přičteme (6.4) dostáváme $(a + a')^2 \leq (b + b')^2 + (c + c')^2$, což jsme chtěli dokázat.

Úloha 6.5. Hloupětínští se rozhodli, že si postaví lanovku. A ne jednu, postavili si celou síť lanovek. Na obrázku **??** jsou zakreslené jejich stanice a mezi nimi jednotlivé linky. Rozhodněte, jestli mohou hloupětínští objet všechny stanice, aniž by nějakou navštívili dvakrát. Jejich trasa může začínat i končit v libovolných stanicích, ale samozřejmě se v průběhu cesty mohou dopravovat pouze lanovkou.

Řešení. Část stanic obarvíme bíle, zbylo část černě podle obrázku.



Každý spoj lanovky vede z bílé stanice do černé. Kdyby bylo možné objet všechny stanice, aniž by byla nějaká navštívena dvakrát, musely by se na trase pravidelně střídat bílé a černé stanice, na trase by proto muselo být buď od obou barev stejně, nebo od jedné o stanici víc. To ale vzhledem k počtu bílých a černých stanic není možné, hloupětínským se to podařit nemůže.

Úloha 6.6. Ňouma s Koumou se rozhodli, že musí lanovku hned vyzkoušet. Celí nedočkaví nasedli do vozu lanovky se sériovým číslem 1367635. Zatímco si Kouma užíval výhled do kraje, Ňouma přemýšlel, zda existuje přirozené b takové, že číslo vozu je zápisem druhé mocniny v soustavě o základu b. Dokázali byste mu pomoci?

Řešení. Číslo, jehož zápis v soustavě o základu b je 1367635 má hodnotu $b^6 + 3b^5 + 6b^4 + 7b^4 + 6b^3 + 3b^2 + 3b + 5 = (b^2 + b + 1)^3 + 4$. Kdyby se toto rovnalo druhé mocnině čísla a, platilo by $(b^2 + b + 1)^3 = a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$. Společný dělitel čísel $a - 2$ a $a + 2$ musí dělit jejich rozdíl, může mít proto hodnotu pouze 1,2 nebo 4. Kdyby byl sudý, muselo by $(b^2 + b + 1)^3$ být sudé, sudé by pak muselo být i $b^2 + b + 1 = b(b + 1) + 1$, což ale nelze, neboť jedno z čísel $b, b+1$ je vždy sudé a součin $b(b+1)$ tedy nemůže být lichý. Víme tak, že čísla $a - 2$ a $a + 2$ jsou nesoudělná. Protože je jejich součin třetí mocninou, musí být i každé z nich třetí mocninou. Mezi dvěma třetími mocninami ale nikdy není rozdíl 4, dané číslo není zápisem druhé mocniny v žádné soustavě.

Úloha 6.7. „Vaše jízdenky prosím," ozvalo se vedle Ňoumy a ten si uvědomil, že si zapomněl lístek koupit. „Pane revizore, nedalo by se . . . ," začal ze sebe Ňouma nesměle soukat. „Dle osmého paragrafu jízdního řádu," přerušil ho revizor, „může být jízdné odpuštěno právě těm osobám, které zvládnou najít všechna přirozená čísla n taková, že polynom $64x^n + 1$ lze psát jako součin nekonstantních polynomů s celočíselnými koeficienty". Zachráníte Ňoumu před pokutou?

Řešení. Rovnici přepíšeme do tvaru $64x^n = -1$. Pro všechna komplexní x, která rovnici splňují, musí platit $64|x|^n = 1$, tedy $|x| = (\frac{1}{64})^{\frac{1}{n}}$. Předpokládejme, že $64x^n + 1$ lze psát ve tvaru $P(x)Q(x)$, kde P a Q mají celočíselné koeficienty a P má stupeň nejvýše roven stupni Q. Protože konstantní člen součinu je součin konstantních členů, jsou konstantní členy obou polynomů buď 1 nebo -1. Předpokládejme první možnost, druhou pak lze docílit změnou znamének u všech koeficientů P a Q. Stupeň polynomu P označme k, stupeň Q je pak $n-k$. Z Viètových vztahů víme, že součin kořenů P je roven $\frac{1}{a_k}$, kde a_k je vedoucí koeficient polynomu P. Protože všechny tyto kořeny mají absolutní hodnotu $(\frac{1}{64})^{\frac{1}{n}}$, platí $(\frac{1}{64})^{\frac{k}{n}} = \frac{1}{a_k}$, tedy $a_k = 64^{\frac{k}{n}} = 2^{\frac{6k}{n}}$, vedoucí koeficient Q pak musí být $b_k = 2^{\frac{6n-6k}{n}}$. Z minulé série víme, že aby bylo $2^{\frac{6k}{n}}$ racionální, musí být $\frac{6k}{n}$ celé. Protože P nemá vyšší stupeň než Q, je $k \leq n/2$, proto $\frac{6k}{n} \in \{1, 2, 3\}$, tedy $n = 6k$, $n = 3k$ nebo $n = 2k$. V prvním a druhém případě je n dělitelné třemi, což je (jak dále ukážeme) dostatečná podmínka k tomu, aby šlo polynom rozložit, neboť $64x^{3t} + 1 = (4x^t + 1)(16x^{2t} - 4x^t + 1)$.

Dále řešme pouze třetí případ. Polynomy P i Q mají stupeň k a n je sudé. Pro sudé n nemá zadaný polynom žádné reálné kořeny (ve všech bodech má hodnotu alespoň 1), jeho kořeny lze rozdělit do dvojic komplexně sdružených čísel. Navíc víme, že v každé z těchto dvojic jsou buď oba kořeny současně kořeny P, nebo jsou oba kořeny Q. Proto lze kořeny P rozdělit do dvojic a k musí být sudé, tedy n musí být dělitelné čtyřmi. To je ale dostatečná podmínka k rozložitelnosti zadaného polynomu, neboť $64x^{4t} + 1 = (8x^{2t} - 4x^t + 1)(8x^{2t} + 4x^t + 1)$.

Polynom lze rozložit na součin dvou polynomů s celočíselnými koeficienty právě tehdy, když je n dělitelné třemi nebo čtyřmi.