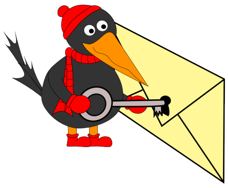
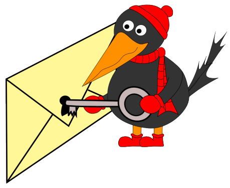


Řešení 5. série

ČÍSELNÉ OBORY

autor: *Matej a Zbyněk*



Úloha 5.1. V Hloupětíně otevřeli nové muzeum, což si Matěj s Liběnkou nemohli nechat ujít. Zastavili se už u první vitríny, v níž byly vystaveny všechny nerostoucí posloupnosti přirozených čísel. Na první pohled bylo zřejmé, že jich tam je nekonečně mnoho, ale děti velmi zajímalo, zda jich je spočetně. Dokázali byste jim poradit?

Řešení. Zkusme se zamyslet nad tím, jak takovou nerostoucí posloupnost čísel $a_1, a_2, \dots$ efektivně zapsat. Nerostoucí posloupnost jistě nikdy nepřeroste svůj první prvek – množina prvků obsažených v posloupnosti je proto konečná. Navíc pokud víme, kolikrát se které číslo v posloupnosti vyskytuje, známe již celou posloupnost – čísla lze do nerostoucí posloupnosti seřadit jediným možným způsobem. Nerostoucí posloupnost tedy umíme zapsat jako množinu dvojic (číslo, počet výskytů), kde počet výskytů je buď přirozené číslo, nebo nekonečno – nejmenší prvek se vždy vyskytne nekonečněkrát. Dvojice tvaru (přirozené číslo, přirozené číslo nebo nekonečno) si můžeme očíslovat přirozenými čísly metodou popsanou v pomocném textu. Každou nerostoucí posloupnost přirozených čísel tak umíme zapsat nejen jako množinu dvojic, ale také jako množinu přirozených čísel. A takových množin je, jak víme z pomocného textu, spočetně mnoho. Proto je spočetně mnohoi nerostoucích posloupností přirozených čísel.

Úloha 5.2. Ňouma s Koumou také nemohli u otevření muzea chybět. Narozdíl od Klevrových je ale víc zaujala výstava logaritmů. Koumu nejvíc uchvátil $\log_2 3$, Ňoumu zase $\log_3 4$. A kluky by teď zajímalo, jestli je součet jejich čísel racionální. Dokážete jim poradit?

Řešení. Budeme sporem dokazovat, že součet racionální není. Předpokládejme tedy, že racionální je. Jeho hodnotu označme q. Platí pak $\log_2 3 + \log_3 4 = q$, současně platí

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \log_2 4 = 2.$$

Dle Viètových vztahů jsou tak čísla $\log_2 3$ a $\log_3 4$ kořeny polynomu $x^2 - qx + 2$; zapředpokladu, že q je racionální, proto jde o algebraická čísla. Jak jsme ale ukázali v pomocném textu, $\log_3 4$ algebraickým číslem není, čímž dostáváme spor s předpokladem. Součet těchto dvou logaritmů je proto iracionální.

Úloha 5.3. Mezitím Matěj s Liběnkou došli k dalšímu exponátu. Byla to sbírka kosinů. Kromě těch známých, jako je $\cos \frac{\pi}{6}$ tam byl i jeden, který se Matějovi obzvláště líbil. Byl to $\cos\left(\frac{\pi}{2^{2012}}\right)$. Chvíli si jej prohlížel a pak se otočil k Liběnce: „Schválně, uměla bys dokázat, že to je algebraické číslo?“

Řešení. Jedno z možných řešení využívá matematickou indukci – budeme dokazovat, že $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ je algebraické číslo pro všechna přirozená n. Protože $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ je algebraické číslo, máme první krok indukce úspěšně za sebou. Nyní předpokládejme, že tvrzení platí pro $n = k$,tedy že máme polynom P, jehož kořenem je $\cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$, a dokažme, že najdeme polynom Q s kořenem $\cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$. Vzpomeneme si na goniometrický vzorec

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 \tag{5.1}$$

a položíme $Q(x) = P(2x^2 - 1)$. Po dosazení $x = \cos\left(\frac{\pi}{2^{k+1}}\right)$ nabude argument P hodnotu $\cos\left(\frac{\pi}{2^k}\right)$ (to plyne přímo z 5.1), hodnota polynomu Q pro takové x bude proto nulová, což jsme chtěli dokázat. Indukcí jsme dokázali, že všechna čísla tvaru $\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ jsou algebraická a proto je algebraické i zadané číslo.

Druhý postup nevyužívá indukci, ale neobejde se bez pokročilejšch poznatků o komplexních číslech. Dle Moivreovy věty jsou komplexní čísla $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2^{2012}}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2^{2012}}\right)$ a $z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2^{2012}}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2^{2012}}\right)$ kořeny polynomu $x^{2^{2012}} - 1$. Definici algebraických čísel lze rozšířit i na komplexní čísla (komplexní číslo je algebraické, pokud je kořenem polynomu s reálnými racionálními koeficienty). Nyní využijeme dvě pomocná tvrzení:

- Racionální násobek algebraického čísla je algebraické číslo (snadno rozmyslíte sami).
- Součet algebraických čísel α, β je algebraické číslo. Zde je důkaz složitější. Je potřeba uvážit posloupnost mocnin $(\alpha+\beta)^1, (\alpha+\beta)^2, \ldots$. Pokud je α kořenem polynomu stupně a a β polynomu stupně b, lze v každý z výrazů v posloupnosti psát ve tvaru součtu $k\alpha^s\beta^t$, kde k je racionální a s, t jsou přirozená čísla po řadě menší než a, b. Tento součet obsahuje nejvýše $(a+1)(b+1)$ členů, proto když napíšeme více než $(a+1)(b+1)$ členů posloupnosti, jeden z nich bude možné vyjádřit jako lineární kombinaci s racionálními koeficienty členů předchozích (to plyne z vlastností soustav lineárních rovnic). Proto lze pro nějaké u psát $(\alpha+\beta)^u$ jako lineární kombinaci nižších mocnin $\alpha+\beta$, jinými slovy $\alpha+\beta$ je kořenem polynomu stupně u s racionálními koeficienty, což jsme chtěli dokázat.

Máme tedy algebraická čísla z_1, z_2 a využitím uvedených tvrzení dostáváme, že jsou algebraická i $z_1 + z_2$ a $\frac{z_1+z_2}{2}$. Protože $\frac{z_1+z_2}{2}$ je ale naše číslo ze zadání, jsme tímto hotovi.

Úloha 5.4. Ňouma s Koumou došli do oddělení přirozených čísel. Našli tam jedno opravdu dlouhé číslo T – bylo zapsáno v desítkové soustavě, mělo ciferný součet 2011 a končilo čtyřčíslím 2012. Kouma hned začal Ňoumu pošťuchovat: „Schválně, jestli dokážeš, že existuje mocnina T^k taková, že v pětkové soustavě začíná na 2011 a ve trojkové na 2012.“

Řešení. Zadání je trochu přeletopočtované – z informací o ciferném součtu a posledním čtyřčíslí si odvodíme, že T není mocninou 3 ani 5, což nám stačí. Tvrzení, že číslo T^k v trojkové soustavě začíná na 2012 lze s vyzapsat jako

$$\exists a \in \mathbb{N} : 59 \cdot 3^a \leq T^k < 60 \cdot 3^a,$$

po zlogaritmování

$$\exists a \in \mathbb{N} : \log_3 59 + a \leq k \log_3 T < \log_3 60 + a.$$

Takové a jistě najdeme, pokud bude $\{k \log_3 T\} \in \langle\{\log_3 59\}, \{\log_3 60\})$, kde $\{x\}$ zde značí desetinnou část x [1]. Podmínka s počátečními ciframi v pětkové soustavě se analogicky redukuje na požadavek, aby bylo $\{k \log_5 T\} \in \langle\{\log_5 256\}, \{\log_5 257\})$. Představíme si tedy kartézský součin intervalů $\langle 0, 1) \times \langle 0, 1)$ jako čtverec o straně 1 a budeme sledovat, které jeho body odpovídají dvojicím $B(k) = (\{k \log_3 T\}, \{k \log_5 T\})$. Konkrétně chceme ukázat, že nějaký z nich padne do obdélníka o rozměrech $\log_3 60 - \log_3 59$ a $\log_5 257 - \log_5 256$. Nejprve si musíme uvědomit, že kdyby dva body $B(k)$ a $B(l)$ splynuly, muselo by být $k \log_3 T - l \log_3 T = (k - l) \log_3 T$ celé číslo, což ale nen možné, protože T není mocnina 3 a $\log_3 T$ i $(k - l) \log_3 T$ jsou proto iracionální. Když náš čtverec rozdělíme na čtverečky o straně ϵ (volme např. ϵ rovno desetině kratší strany obdélníka, který chceme zasáhnout), padne do jednoho čtverečku nekonečně mnoho bodů $B(k)$. Dle předchozího tvrzení je těchto nekonečně mnoho bodů různých, můžeme tedy vzít dva: $B(k_1)$ a $B(k_2)$. Protože se desetinná část chová hezky vzhledem ke sčítání (platí $\{x + y\} = \{\{x\} + \{y\}\}$), víme, že změnou k o $k_2 - k_1$ se změní $B(k)$ v obou souřadnicích nejvýše o ϵ (případně jsou li blízké hranici čtverce, „skočí“ na protější stranu).

Nyní pro všechna reálná čísla x položme $C(x) = (\{x\{(k_2 - k_1) \log_3 T\}\}, \{x\{(k_2 - k_1) \log_5 T\}\})$. Množina všech bodů $C(x)$ je tvořena úsečkami – postupným zvětšováním x se obě souřadnice $C(x)$ mění lineárně do doby, než jedna z nich nabude hodnotu blízkou jedné; pak se tato souřadnice vynuluje a obě souřadnice pokračují v lineárním růstu. Všimněme si, že když za x dosadíme celé číslo t, dostaneme bod $C(t) = B(t(k_2 - k_1))$, neboť $\{ty\} = \{t\lfloor y\rfloor + t\{y\}\} = \{t\{y\}\}$ pro všechna celá y. Ve směru těchto úseček se tedy umíme pohybovat o vzdálenost menší než $\sqrt{2}\epsilon$ (v každé souřadnici nejvýše ϵ). Průsečíky těchto úseček s levou hranou čtverce jsou body tvaru $(0, \{r\{(k_2 - k_1) \log_5 T\}\})$, kde $\{r\{(k_2 - k_1) \log_3 T\}\} = 0$, neboli pro nějaké přirozené p $r\{(k_2 - k_1) \log_3 T\} = p$, $r = \frac{p}{\{\log_3 T(k_2 - k_1)\}}$. Takové body mají y-ovou souřadnici $\{p\zeta\}$, kde

$$\zeta = \frac{\{(k_2 - k_1) \log_5 T\}}{\{(k_2 - k_1) \log_3 T\}}.$$

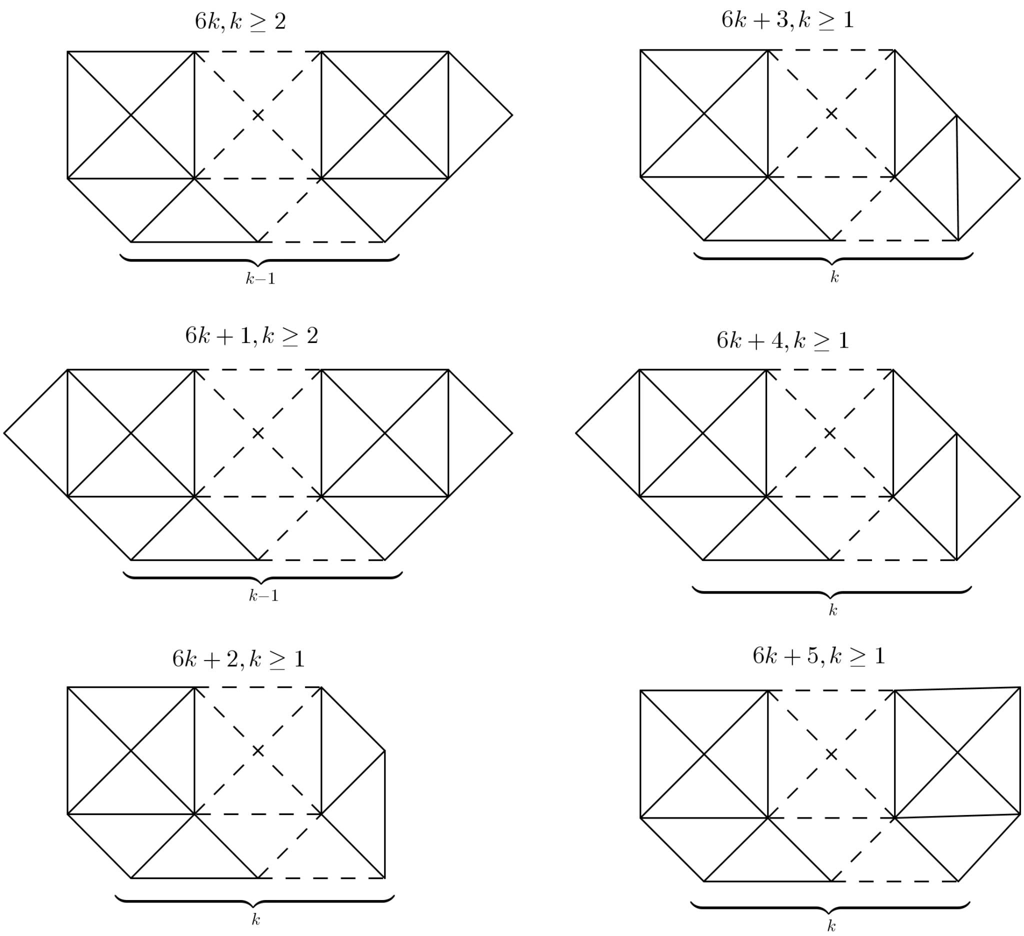
. Číslo ζ je číslem tvaru $\frac{A \log_5 T - B}{C \log_3 T - D}$ pro nějaká přirozená A, B, C, D, což je číslo iracionální. Protože je číslo ζ iracionální, průsečíky úseček s levou stranou čtverce tvoří hustou množinu. Na každé z úseček delších než $\sqrt{2}\epsilon$ leží alespoň jeden bod $B(k)$.

Obdélníkem, který se snažíme zasáhnout pro vhodně zvolené jistě alespoň jedna taková úsečka prochází, na této jsou nějaké body $B(k)$ ve vzdálenosti menší než $\sqrt{2}\epsilon$, jeden z nich leží uvnitř obdélníka a důkaz je konečně hotov.

Úloha 5.5. Do muzea se přišel podívat i Henry. Jako zasloužilého geometra ho nejvíce zaujaly mnohoúhelníky. Hloupětín se pyšnil sbírkou konvexních šestiúhelníků, z nichž každý byl složen ze shodných pravoúhlých rovnoramenných trojúhelníků. Henryho hned zajímalo, pro jaké počty trojúhelníků **větší než 10** je možné takový šestiúhelník sestrojit. Poradíte mu?

[1] Desetinnou část definujeme předpisem $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$, kde $\lfloor x\rfloor$ je největší celé číslo nepřevyšující x.

Řešení. Dokážeme, že to je možné pro všechna $n > 10$. Všechna možná n rozdělíme do šesti skupin podle toho,jaký dávají zbytek po dělení šesti. Schémata rozložení jsou nakreslena na následujícím obrázku:



Úloha 5.6. Hned vedle šestiúhelníků byly vystaveny čtyřúhelníky. Jeden z nich měl úhlopříčky dlouhé 6 a 8 palců. Dokázali byste určit, jakou nejmenší délku mohla mít jeho nejdelší strana?

Řešení. Průsečík úhlopříček označme P. Jeden z úhlů APB, BPC je alespoň roven $90°$, předpokládejme, že je to APB. Kosinus takového úhlu je nekladný, z kosinové věty pak plyne $|AB|^2 \geq |AP|^2 + |BP|^2$, analogicky $|CD|^2 \geq |CP|^2 + |DP|^2$. Sečtením nerovností

$$\begin{aligned}|AB|^2 + |CD|^2 &\geq |AP|^2 + |CP|^2 + |BP|^2 + |DP|^2 = \\ &= \frac{1}{2}[(|AP| + |CP|)^2 + (|AP| - |CP|)^2 + (|BP| + |DP|)^2 + (|BP| - |DP|)^2]\end{aligned}$$

Protože druhé mocniny čísel $(|AP| - |CP|)$ a $(|BP| - |DP|)$ jsou nezáporné a $|AP| + |CP|$

a $|BP| + |DP|$ jsou délky úhlopříček, máme

$$|AB|^2 + |CD|^2 \geq \frac{1}{2}(8^2 + 6^2) = 50,$$

větší z druhých mocnin na levé straně je alespoň 25, jedna strana čtyřúhelníka je proto alespoň 5 palců. Aby nastala rovnost, musí platit $|AP| - |CP| = |BP| - |DP| = 0$, navíc musí nastat i rovnost v odhadu z kosinové věty a úhlopříčky na sebe musí být kolmé. Minimální délku nejdelší strany proto může mít pouze kosočtverec (jediný čtyřúhelník, v němž jsou úhlopříčky kolmé a vzájemně se půlí). Přitom snadno ověříme, že složením čtyř trojúhelníků o stranách 3,4 a 5 palců odvěsnami k sobě získáváme kosočtverec, který vyhovuje zadání a má všechny strany pět palců dlouhé.

Úloha 5.7. Ňouma s Koumou se v oddělení přirozených čísel ještě chvíli zdrželi. Součástí výstavy totiž byl i jeden rekordman. Největší přirozené číslo takové, že žádná jeho část (tj. žádné číslo tvořené po sobě jdoucími ciframi původního čísla) **nemá ciferný součin roven třetí mocnině celého čísla**. Jak dlouhé je takové číslo?

Řešení. Pro usnadněnípopisu zaveďme následující značení: je-li p prvočíslo a n přirozené číslo, pak $v_p(n)$ značí nejvyšší přirozené k takové, že $p^k|n$. Dále si označíme N počet cifer onoho rekordního čísla a $a_1, a_2, \dots, a_N$ jeho cifry v pořadí zleva doprava při běžném zápisu.

Teď k samotnému řešení. Ciferný součin může mít v rozkladu jen prvočísla 2,3,5,7. Položíme $d_i = v_2(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_i) \bmod 3$ $t_i = v_3(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_i) \bmod 3$ $p_i = v_5(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_i) \bmod 3$ $s_i = v_7(a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_i) \bmod 3$

Čísla d_i, t_i, p_i, s_i nabývají hodnot od 0 do 2, proto existuje pouze $3^4 = 81$ různých možných čtveřic (d_i, t_i, p_i, s_i). Pokud by některá z těchto čtveřic byla rovna $(0, 0, 0, 0)$, znamenalo by to, že součin prvních i cifer obsahuje dvojku, trojku, pětku i sedmičku v mocnině dělitelné třemi; protože neobsahuje žádná jiná prvočísla, je roven třetí mocnině, což je ale v rozporu s definicí rekordního čísla. Podobně kdyby se některá ze zbylých čtveřic vyskytla dvakrát, a to na pozicích i a j, byl by součin cifer $a_{i+1}a_{i+2}\dots a_j$ roven třetí mocnině (stačí si uvědomit, že když je dvojka na prvních j pozicích $3v + d_j$-krát a na prvních i pozicích $3u + d_j$-krát, je na pozicích $i + 1$ až j $3v + d_j - (3u + d_j) = 3(v - u)$-krát; stejně tak s ostatními prvočísly). Aby se žádná čtveřice nezopakovala, musí být $N \leq 80$.

Nyní ukažme, že číslo délky 80 s danou vlastností umíme sestrojit. Budeme postupně budovat čísla využívající pouze omezené množiny cifer, která neobsahují část s ciferným součinem rovným třetí mocnině. Nejprve zkusme takové číslo vytvořit pouze z dvojek. Zřejmě nejdelším vyhovujícím je 22. Nyní vytvořme takové číslo z dvojek a trojek. K tomu vezmeme tři kopie předchozího čísla a oddělíme je trojkami: 22322322. Pokud by nějaká část měla být třetí mocninou, nemůže obsahovat trojku (pak by musela obsahovat trojky alespoň tři, což nelze). Taková část by tedy musela býtčástí čísla 22, což také nelze. Proto naše číslo vyhoví. Nyní přidáme pětky. Opět vezmeme tři kopie čísla z předchozího kroku a oddělíme je pětkami: 22322322522322322522322322. Pokud by nějaká část tohoto čísla měla být třetí mocninou, nemůže obsahovat pětku (jsou opět jen dvě),nemůže být ani částí čísla 22322322 (viz minulý krok). V posledním kroku přidáme sedmičky stejným způsobem – ani tentokrát se nestane, že by částí výsledného čísla byla třetí mocnina.

Nejdelší číslo s popsanou vlastností má 80 cifer, příkladem takového čísla je

223223225223223225223223227223223225223223225223223227223223225223223225223223 22.