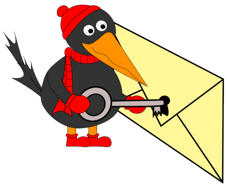
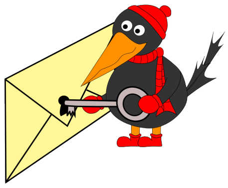


Řešení 4. série

Pravděpodobnost

autor: *Emu a Bzzzučík*



Úloha 4.1. Pomalu už končí zima, venku jsou poslední hromádky sněhu a Matěj s Liběnkou sedí vevnitř u televize a náhodně sestavují čísla z číslic 1, 3, 5, 6, 8, 9 (každá je použita nejvýše jednou). Matěj sestavuje šesticiferná, Liběnka pěticiferná a přitom se hádají, kdo má větší pravděpodobnost, že jeho číslo bude dělitelné jedenácti. Dokážete jejich rozepři rozetnout a určit obě pravděpodobnosti?

Řešení. Jak Matěj, tak Liběnka maj celkově $6! = 720$ možností, jak číslice poskládat. A kolik z nich je dělitelných 11?

Začněme Matějem. Ten musí použít všechny číslice, jejich součet je 32, a rozdělit je do dvou skupin po 16 (z pravidla dělitelnosti 11), aby byl rozdíl 0 nebo do skupin 5 a 27 (rozdíl 22). Ve druhém případě nemáme žádnou možnost, aby součet tří číslic byl 5, v prvním případě je jediná možnost a to 1,6,9 a 3,5,8. Když tyto číslice propermutujeme a vynásobíme dvěmi(která z trojic bude na lichých pozicích a která na sudých), získáváme celkem $3! \cdot 3! \cdot 2 = 72$. Pravděpodobnost je tedy $\frac{72}{720} = \frac{1}{10}$.

Pokračujme Liběnkou. Pokud bude rozdíl 0, musíme odebrat sudé číslo, tím získáváme dvě možnosti: 8,5 a 9,3,1; 9,3 a 6,5,1. Pokud bude rozdíl 11, musíme odebrat liché číslo. Při odebrání 1 nebo 5 nedostaneme žádné možnosti, pro zbylá dvě čísla získáváme 1,5 a 3,6,8; 1,8 a 5,6,9. Všechny tyto 4 možnosti zase propermutujeme, tentokrát je jasně dané, že dvě čísla jsou na sudých pozicích, pro každou ze čtyř možností je to tedy $2! \cdot 3! = 12$, celkově $12 \cdot 4 = 48$ a pravděpodobnost je $\frac{48}{720} = \frac{1}{15}$.

Tentokrát má Matěj pravděpodobnost vyšší, ale nebojte, Liběnka mu to v nějaké z dalších sérií vrátí!

Úloha 4.2. S vaší pomocí se jim naštěstí úloha podařila vyřešit a oba sedí spokojeně v kuchyni a čekají, až Henry dokuchtí nějaké jídlo a mezitím Liběnka povídá, že četla včera v novinách, že vědci z Jamajky vyvinuli novou kontrolku v autě, která hlásí zledovatělou silnici. Na zledovatělé silnici se rozsvítí s pravděpodobností 0,999, s pravděpodobností 0,005 však signalizuje ledovou silnici, i když ledová vůbec není. Silnice na Jamajce jsou ledové s pravděpodobností 0,003. Matěji, jaká je pravděpodobnost, že pokud bliká kontrolka, jde o planý poplach?

Řešení. Můžou nastat 4 případy:

a) Silnice je zledovatělá a kontrolka svítí

b) Silnice není zledovatělá a kontrolka svítí

c) Silnice je zledovatělá a kontrolka nesvítí

d) Silnice není zledovatělá a kontrolka nesvítí

Nás zajímá, jaká je pravděpodobnost planého poplachu za předpokladu, že kontrolka svítí. Tedy pravděpodobnost situace b) za předpokladu, že nastala situace a) nebo b).

Pravděpodobnost b) je:
Pravděpodobnost, že je led je $0,003$, tedy pravděpodobnost, že led není je $1 - 0,003 = 0,997$. Pravděpodobnost, že je led a kontrolka svítí je ze zadání $0,005$. Tedy celková pravděpodobnost situace b) je $0,997 \cdot 0,005 \doteq 0,004985$.

Pravděpodobnost jevu a) je:
Je led s pravděpodobností $0,003$. Je led a kontrolka správně svítí s pravděpodobností 0.999. Tedy celkově dostáváme pravděpodobnost $0,003 \cdot 0,999 \doteq 0,002997$.

Pravděpodobnost planého poplachu za předpokladu, že kontrolka svítí tedy je: $\frac{p(b)}{p(b)+p(a)} \doteq \frac{0,004985}{0,004985+0,002997} \doteq 0,624530$.

Úloha 4.3. Matěj chce také zabodovat a tak si také donese pytlík a řekne, že v pytlíku je 2012 míčků, z toho 20 červených, 2 modré a ostatní jsou zelené. Vy si teďka budete náhodně tahat míčky z mého pytlíku a vždycky je zase vrátíte zpátky. Pokud bude vytažen modrý míček, vyhraje Henry a pokud bude dvakrát za sebou vytažen červený míček, pak vyhraje Liběnka. Míčky budete vytahovat tak dlouho, dokud jeden z vás nevyhraje. Kdo má větší pravděpodobnost, že vyhraje - Liběnka nebo Henry? A jaká je tato pravděpodobnost?

Řešení. Tahy si rozdělíme do dvou skupin, a to na:

a) tahy, kde v předchozím tahu nebyla červená

b) tahy, kde v předchozím tahu byla červená

Pravděpodobnost, že vyhraje Liběnka v situaci a) si označíme jako l_a a v situaci b) jako l_b. Nyní si tyto 2 situace probereme trochu podrobněji:

a) V předchozím tahu nebyla červená a Liběnka vyhraje s pravděpodobností l_a. Mohlo nastat:

Vytáhli jsme modrou s pravděpodobností $\frac{2}{2012}$. V takové situaci vyhrál Henry a tedy pravděpodobnost, že vyhraje Liběnka je 0.

Vytáhli jsme zelenou s pravděpodobností $\frac{1990}{2012}$. V takové situaci nikdo nevyhrál a dostali jsme se znovu do tahu a), tedy pravděpodobnost, že vyhraje Liběnka je l_a .

Vytáhli jsme červenou s pravděpodobností $\frac{20}{2012}$. V takové situaci opět nikdo nevyhrál a dostali jsme se do tahu b), tedy pravděpodobnost, že vyhraje Liběnka je l_b .

Dohromady dostáváme:
$l_a = \frac{2}{2012} \cdot 0 + \frac{1990}{2012} \cdot l_a + \frac{20}{2012} \cdot l_b \Rightarrow 11l_a = 10l_b$.

b) V předchozím tahu byla červená a Liběnka vyhraje s pravděpodobností l_a:

Vytáhli jsme modrou s pravděpodobností $\frac{2}{2012}$. V takové situaci opět vyhrává Henry a tedy pravděpodobnost, že vyhraje Liběnka je 0.

Vytáhli jsme zelenou s pravděpodobností $\frac{1990}{2012}$. V takové situaci nikdo nevyhrál a dostali jsme se do tahu a), tedy pravděpodobnost, že vyhraje Liběnka je l_a .

Vytáhli jsme červenou s pravděpodobností $\frac{20}{2012}$. V takové situaci vyhravá Liběnka (tedy vyhraje s pravděpodobností 1).

Dohromady dostáváme:
$l_b = \frac{2}{2012} \cdot 0 + \frac{1990}{2012} \cdot l_a + \frac{20}{2012} \cdot 1$.

Po spojení těchto dvou rovnic dohromady dostáváme: $l_a = \frac{25}{279}$, $l_b = \frac{55}{558}$. Na začátku jsme v tahu a), protože v předchozím tahu nebylo taženo nic, tedy ani červená. Pravděpodobnost výhry Liběnky je tedy $l_a = \frac{25}{279}$. Z toho plyne, že větší šanci na výhru má Henry, a to $1 - \frac{25}{279} = \frac{254}{279} \doteq 0,910$.

Úloha 4.4. Henry už mezitím připravil to jídlo, na které se děti tak těšily a sedl si k nim ke stolu. Děti, dneska bude jídlo trochu jiné. Připravil jsem dva pytlíky s buchtami. V každém pytlíku je přesně n buchet. Vy si nyní budete náhodně vybírat z pytlíků po jednom buchty a jakmile jeden z vás šáhne do pytlíku a už v něm žádná buchta nebude, tak zbylé buchty v pytlíku druhém zůstanou mně. Jaká je pravděpodobnost, že mi v tom druhém pytlíku zbyde právě k buchet? (Matěj s Liběnkou nejsou žádní nenažranci a sobci, takže z pytlíků opravdu vybírají náhodně a nejde jim o to, aby měli co nejvíce buchet nebo naopak aby Henrymu zbylo nejvíce buchet.)

Řešení. Přinejhorším na prázdný pytlík narazí v $(2n+1)$-ním tahu. Pravděpodobnostním prostorem pro nás tedy budou posloupnosti délky $2n+1$ s nulami a jedničkami (tj. z kterého pytlíku děti tahaly ve kterém tahu), kterých je 2^{2n+1}. V příznivém případě z prvních $2n-k$ buchet vytáhl n z levého a $n-k$ z pravého, pak chce táhnout z levého, který už je prázdný, a zbylých k pokusů už je nám to jedno; anebo naopak prázdný je pravý pytlík:

$$p = \frac{\binom{2n-k}{n} \cdot 1 \cdot 2^k}{2^{2n+1}} \cdot 2 = \binom{2n-k}{n} \cdot 2^{k-2n}$$

Úloha 4.5. Kouma si už zase něco koumá a Ňouma se naopak v něčem ňoumá. A víte, že mají oba tu samou matematickou úlohu? Dostali totiž od rodičů dokázat, že číslo

$$53^{103} + 103^{53}$$

je dělitelné 3, 4 i 13. A vy se v tom budete ňoumat nebo to vykoumáte?

Řešení. Nejprve si zapišme přehledněji zadání: $24^n \cdot n! \mid (4n)!$. Důkaz nyní provedeme indukcí. Pro $n = 1$ tvrzení platí. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n a dokažme, že pak platí i pro $n + 1$. Dokazujeme tedy $24^{n+1} \cdot (n + 1)! \mid (4(n + 1))!$, co upravíme jako $24^n \cdot 24 \cdot n! \cdot (n+1) \mid (4n)! \cdot 4 \cdot (n+1) \cdot (4n+3) \cdot (4n+2) \cdot (4n+1)$. Dle předpokladu platí $24^n \cdot n! \mid (4n)!$ a zároveň $(n+1) \mid (n+1)$, stačí nám tedy dokázat, že $24 \mid 4 \cdot (4n+3) \cdot (4n+2) \cdot (4n+1)$, co upravíme na $2 \cdot 3 \mid (4n + 3) \cdot (4n + 2) \cdot (4n + 1)$. Protože to jsou tři po sobě jdoucí čísla, alespoň jedno z nich musí být dělitelné 3 a zároveň prostřední $(4n + 2)$ je dělitelné 2, tím je důkaz hotov.

Úloha 4.6. Protože Hloupětínští jsou sice hrozně hloupí, ale zato velice hraví, rozhodli se, že si místní kašnu ozdobí. První přišel a namaloval na kašnu rovnoramenný trojúhelník ABC. Druhý ho vystřídal a sestrojil kružnici se středem C a poloměrem r. Třetí měl zase moc rád tečny, a tak vytvořil tečnu z vrcholu A k této kružnici. Čtvrtý se rozhodl, že se mu nesymetrický obrázek nelíbí a domaloval ještě tečnu v bodě B. Pak přišel jeden návštěvník z Lenošína a začal moc pěkně počmáranou kašnu obdivovat. Byl totiž tak líný, že by ho nikdo nikdy nedonutil něco na kašnu kreslit. Ale protože nebyl vůbec hloupý, dokázal si najít množinu všech průsečíků těchto tečen, které mohli druhý, třetí a čtvrtý kreslíř získat, jestliže poloměr r mohli volit jak chtěli (za podmínky $r < |CA|$, jinak by přeci tečny neexistovaly) a pro každý z vrcholů A, B si mohli vybrat libovolnou z tečen. A vy to jistě také zvládnete, nebo ne?

Řešení. Nejdříve si všimneme, že je úloha symetrická podle osy strany AB (označíme si ji o). Tečny ke kružnici z bodu A a_1, a_2 tedy přejdou na tečny ke kružnici z bodu B b_1, b_2. Z toho jasně vyplývá, že průsečíky tečen a_1, b_1 a a_2, b_2 leží na o. Naopak pro libovolný bod X osy o, s výjimkou bodů C (situace, kdy $r = 0$), středu AB (tečny nám splývají) a průsečíku kolmic na AC a BC ($r = |AC|$), najdeme takové r, že v něm leží průsečík tečen: Vezmeme si kolmici na AX, která prochází bodem C a protíná AX v bodě Y. Poloměr r potom zvolíme jako $|CY|$, tím máme zaručeno, že AX i BX jsou tečnami.

Druhý případ získáme průsečíky tečen a_1, b_2 a a_2, b_1. Tyto průsečíky si označíme D,E. Body dotyku tečen s kružnicí si odpovídajíce označíme A_1, A_2, B_1, B_2. Trojúhelníky CDA_1, CDA_2, CEB_1 a CEB_2 jsou shodné podle věty Ssu a podle osové symetrie. Z toho dostáváme $\sphericalangle CDA_1 = \sphericalangle CDA_2 = \sphericalangle CEB_1 = \sphericalangle CEB_2$ a z toho vidíme, že čtyřúhelníky $CDAE$ a $CDBE$ jsou tětivové (neboť $\sphericalangle CDA + \sphericalangle CEA = 180°$,...) a tedy A, B, C, D a E leží na jedné kružnici, a to kružnici opsané trojúhelníku ABC.

Ještě musíme ukázat, že pro libovolný bod X kružnice opsané trojúhelníku ABC (kromě bodů A, B, C) najdeme vhodný poloměr r. Spustíme z bodu C kolmice na AX a BX, paty těchto kolmic si označíme K, L. Pro případ, kdy X je v opačné polorovině k polorovině dané přímkou AB a bodem C, jsou úhly $\sphericalangle AXC = \sphericalangle BXC$ (protože jsou to obvodové úhly kružnice opsané nad stejně dlouhými tětivami AC a BC). Z toho dostáváme, že trojúhelníky CXK a CXM jsou shodné podle věty usu, a tedy $|CK| = |CL|$ kružnice s $r = |CK|$ se dotýká obou přímek XA i XB.

V opačné případě (tedy když X je v polorovině dané přímkou AB a bodem C) platí, pak $\angle CAX = \angle CBX$ (obvodové úhly nad CX). Trojúhelníky CAK a CBL jsou shodné podle věty usu a tedy $|CK| = |CL|$.

Řešením tedy je osa úsečky AB a kružnice opsaná trojúhelníku ABC s výjimkou bodů A, B, C, průsečíku kolmic na AC a BC a středu AB.

Úloha 4.7. Víte, že Kouma s Ňoumou rádi řeší soustavy rovnic? Jenže o tuhle se tak pohádali, kdo ji bude řešit, až ji roztrhli a tak měl Kouma na papíře pouze rovnici

$$ux + vy = x^2 + xy$$

a Ňouma měl zbylé dvě

$$\begin{aligned} vx + uy &= y^2 + xy, \\ xy + uv &= u^2 + v^2. \end{aligned}$$

Jeden druhému je nechtěli ukázat a tak tento příklad ani jeden z nich nevyřešil, a tak vy můžete být první, protože znáte obě části! Dokažte, že všechny řešení této soustavy v oboru reálných čísel jsou tvaru $x = y = u = v$.

Řešení. Sečteme dvojnásobek první, dvojnásobek druhé a čtyřnásobek třetí rovnice, dostaneme tak

$$2ux + 2vy + 2vx + 2uy + 4xy + 4uv = 2x^2 + 2y^2 + 4u^2 + 4v^2,$$

po úpravě

$$x^2 - 2ux + u^2 + y^2 - 2vy + v^2 + x^2 - 2vx + v^2 + y^2 - 2uy + u^2 + 4xy + 2u^2 + 2v^2 - 4uv = 0,$$

což lze dále upravit na

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 + (x - v)^2 + (y - v)^2 + 2(u - v)^2 = 0.$$

Součet druhých mocnin je nulový jen tehdy, jsou li všechny nulové, musí proto platit $x = u$, $y = v$, $x = v$ a $u = v$, což zaručuje rovnost všech čtyř proměnných.