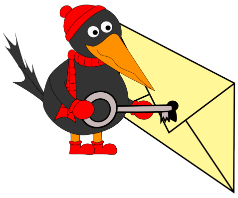
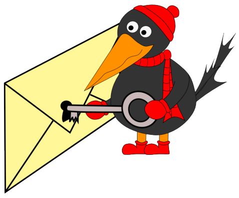


Řešení 3. série

Rovnice



Úloha 3.1.

Nalezněte neznámou x, pro kterou platí:

$$\sin^3 x \cos 3x + \cos^3 x \sin 3x = \frac{3}{8}.$$

Řešení. Pomocí vzorce o součtu argumentů a dvojnásobném úhlu lze snadno odvodit $\sin 3x = \sin(2x+x) = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. Dosazením a následnou úpravou obdržíme

$$\begin{aligned}
4\sin^3 x \cos^3 x - 3\sin^3 x \cos x + 3\sin x \cos^3 x - 4\sin^3 x \cos^3 x &= \frac{3}{8},\\
8\sin x \cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) &= 1,\\
4\sin 2x \cos 2x &= 1,\\
\sin 4x &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme $4x_1 = 30° + k \cdot 360°$, tj. $x_1 = 7,5° + k \cdot 90°$, nebo $4x_2 = 150° + k \cdot 360°$, tj. $x_2 = 37,5° + k \cdot 90°$, $k \in \mathbb{Z}$. Řešení:

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{7,5° + k \cdot 90°; 37,5° + k \cdot 90°\}.$$

Úloha 3.2.

Kořeny rovnice jsou $x^3 - x + 1 = 0$ jsou a, b, c. Určete hodnotu výrazu $a^8 + b^8 + c^8$.

Řešení. Pomocí Viètových vztahů víme, že

$$\begin{aligned}
a + b + c &= 0\\
ab + bc + ca &= -1\\
abc &= -1.
\end{aligned}$$

Nyní se algebraickými úpravami budeme snažit dostat $a^8 + b^8 + c^8$ tak, abychom mohli použít naše známé výsledky z Viètových vztahů. Začneme

$$\begin{aligned}
&a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 2,\\
&a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c) = 1,\\
&a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 2.
\end{aligned}$$

Obdobným postupem se dostaneme k výsledku

$$a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4 = (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - 2a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2) = 1 - 4 = -3,$$
$$a^8 + b^8 + c^8 = (a^4 + b^4 + c^4)^2 - 2(a^4b^4 + b^4c^4 + c^4a^4) = 4 + 6 = 10.$$

Úloha 3.3.

Najděte všechna celá čísla, která jsou řešením rovnice

$$(m^2 - n^2)^2 = 1 + 16n.$$

Řešení. Zřejmě ze zadání víme, že n nemůže být záporné číslo. Také je vidět, že pokud (m, n) je řešením rovnice, pak také $(-m, n)$ je řešením. Jestliže $n = 0$, pak $m = \pm 1$. Pro $m = 0$ dostáváme $n^4 = 1 + 16n$, což nemá řešení, protože by n muselo dělit 1, ale n má být celé číslo.

Úpravou dostáváme $m^2 = n^2 + \sqrt{1 + 16n}$ nebo $m^2 = n^2 - \sqrt{1 + 16n}$. V prvním případě je $m > n$. Ale $(n+1)^2 = n^2+2n+1$ je větší než $n^2+\sqrt{1 + 16n}$ pro $(2n+1)^2 > 1+16n$ nebo $n > 3$. Jestliže tedy $n > 3$, pak m^2 leží mezi n^2 a $(n + 1)^2$, což není možné. Je snadné zjistit, že pro $n = 1; 2$ nemá rovnice řešení. Pro $n = 3$ nalezneme $m = 4$.

Obdobně v druhém případě musí být $n \leq 5$. Rovnice má řešení jen pro $n = 5$ a $m = 4$. Celkově dostáváme řešení: $(m, n) = (\pm 1; 0), (\pm 4; 3), (\pm 4, 5)$.

Úloha 3.4.

Nalezněte všechny trojice kladných reálných čísel (x, y, z), která splňují:

$$x + y + z = 6,$$
$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2 - \frac{4}{xyz}.$$

Řešení. Užitím Cauchy-Schwarzovy nerovnosti

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)(x + y + z) \geq (1 + 1 + 1)^2$$

a rovnice $x + y + z = 6$ dostáváme po dosazení

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{2}.$$

Druhou rovnici lze tedy přepsat na nerovnici $2 - \frac{4}{xyz} \geq \frac{3}{2}$ a vyjádřit z ní $xyz \geq 8$. Naopak pomocí AG nerovnosti víme, že

$$2 = \frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz},$$

a tudíž $xyz \leq 8$. Z rovnosti $xyz = 8$ již plyne jediné řešení naší soustavy $x = y = z = 2$.

Úloha 3.5.
Je dán tětivový lichoběžník $ABCD$ se základnami AB, CD. Označme E průsečík jeho úhlopříček a F průsečík tečen sestrojených k opsané kružnici v bodech B a C. Dokažte, že přímky EF a AB jsou rovnoběžné.

Řešení.
Thaletova kružnice nad průměrem SF obsahuje vrcholy B, C daného lichoběžníku. Označíme-li α velikost úhlu BAC, bude zřejmě $|\measuredangle BSC| = 2\alpha$ (odpovídající středový úhel) a také $|\measuredangle BEC| = 2\alpha$ (jedná se o vnější úhel k rovnoramennému trojúhelníku ABE). Z toho vyplývá, že body B, C, S, E, F leží na kružnici, a pokud $S \neq E$, je podle Tahletovy věty $|\measuredangle SEF| = 90°$, neboli $EF \parallel AB$.

Pokud je $S = E$, je uvažovaný lichoběžník obdélník a snadno se přesvědčíme, že uvedené tvrzení platí ($SF = EF$ je osou souměrnosti obdélníku $ABCD$).

Úloha 3.6.
Nechť n, k jsou přirozená čísla, pro která platí $(n \geq k)$, a S je množina n bodů v rovině mající tyto vlastnosti:

- *žádné tři body množiny S neleží na přímce,*
- *ke každému bodu $P \in S$ existuje v S alespoň k navzájem různých bodů majících stejnou vzdálenost od bodu P.*

Dokažte, že jsou-li tyto vlastnosti splněny, platí nerovnost

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Řešení.
Tvrzení dokážeme sporem. Předpokládejme, že

$$k \geq \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Ke každému bodu $P \in S$ existuje nejméně $\binom{k}{2}$ dvojic bodů A a B, pro které $|AP| = |BP|$. Čili máme alespoň $n\binom{k}{2}$ dvojic bodů A a B, pro které platí, že na ose úsečky AB leží alespoň jeden bod z množiny S.

Můžeme tedy provést následující:

$$n \cdot \binom{k}{2} = n\frac{k(k-1)}{2} \geq \frac{n}{2}\left(\sqrt{2n} + \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2n} - \frac{1}{2}\right) = n \cdot \left(n - \frac{1}{8}\right) > 2\binom{n}{2}.$$

Jelikož máme pouze $\binom{n}{2}$ různých dvojic bodů $A, B (A, B \in S)$, musí existovat dvojice bodů A, B, která je započítána alespoň třikrát, tj. na ose úsečky AB leží alespoň tři různé body z S. To je ale spor s úvodním předpokladem.

Úloha 3.7.

Pro daná nesoudělná čísla $p > q > 0$ najděte všechny dvojice reálných čísel c, d tak, aby pro množiny

$$A = \left\{ \left\lceil n\tfrac{p}{q} \right\rceil ; n \in \mathbb{N} \right\} \qquad a \qquad B = \{\lceil cn + d \rceil ; n \in \mathbb{N}\}$$

platilo $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{N}$.

Řešení.

Jelikož $\left\lceil n\frac{p}{q} \right\rceil \leq m - 1$, právě když $n < m\frac{q}{p}$, obsahuje množina A právě $\left\lceil m\frac{p}{q} \right\rceil - 1$ čísel menších než m a podobně množina B obsahuje právě $\left\lceil \frac{m-d}{c} \right\rceil - 1$ čísel menších než m. (Zde $\lceil x \rceil$ značí tzv. horní celou část čísla x, tj. nejmenší celé číslo alespoň rovné číslu x.)

Množiny A, B splňují požadavky úlohy, právě když pro každé přirozené m platí

$$|A \cap \{1, 2, \dots, m-1\}| + |B \cap \{1, 2, \dots, m-1\}| = m - 1,$$

tj. právě když pro každé m přirozené platí

$$\left\lceil \frac{mq}{p} \right\rceil - 1 + \left\lceil \frac{m-d}{c} \right\rceil - 1 = m - 1,$$

čili

$$\left\lceil \frac{mq}{p} \right\rceil + \left\lceil \frac{m-d}{c} \right\rceil = m + 1. \qquad (*)$$

Pro libovolná reálná čísla x, y platí, že $\frac{mx+y}{m} \to x$, když $m \to \infty$, jak je vidět z nerovností

$$x + \frac{y}{m} \leq \frac{\lceil mx + y \rceil}{m} < x + \frac{y+1}{m}.$$

Z rovnice označené (*) limitním přechodem dostaneme rovnost

$$\frac{q}{p} + \frac{1}{c} = 1,$$

což dává $c = \frac{p}{p-q}$. Dosazením do rovnosti (*) vychází pro každé m přirozené

$$\left\lceil \frac{mq}{p} \right\rceil + \left\lceil m\frac{p-q}{p} - d\frac{p-q}{p} \right\rceil = m + 1,$$

$$\left\lceil \frac{mq}{p} \right\rceil + \left\lceil \frac{-mq}{p} \right\rceil - d \left\lceil \frac{p-q}{p} \right\rceil = 1.$$

Pišme $\frac{mq}{p} = n + r$, kde n je celé a $r \in (0, 1\rangle$. Poslední rovnost tak můžeme přepsat jako

$$n + \lceil r \rceil + \left\lceil -n - r - d\frac{p-q}{p} \right\rceil = 1,$$

a protože $\lceil r \rceil = 1$, dostáváme podmínku

$$\left\lceil -r - d\frac{p-q}{p} \right\rceil = 0, \qquad \text{neboli} \qquad -1 < -r - d\frac{p-q}{p} \leq 0,$$

což je ekvivalentní s nerovnostmi

$$-r\frac{p}{p-q} \leq d < -(r-1)\frac{p}{p-q}.$$

Protože čísla p, q jsou nesoudělná, nabývá r pro různá m (stačí $1 \leq m \leq p$) všech možných hodnot $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, 1$, tudíž vychází, že

$$d \in \left\langle -\frac{1}{p-q}, 0 \right).$$

Obráceně, je-li $c = \frac{p}{p-q}$, $d \in \left\langle -\frac{1}{p-q}, 0 \right)$, dostaneme pro každé m přirozené, že platí rovnice (*), což zaručuje, že $A \cup B = \mathbb{N}$, $A \cap B = \emptyset$.