Zadání 2. série

GEOMETRIE

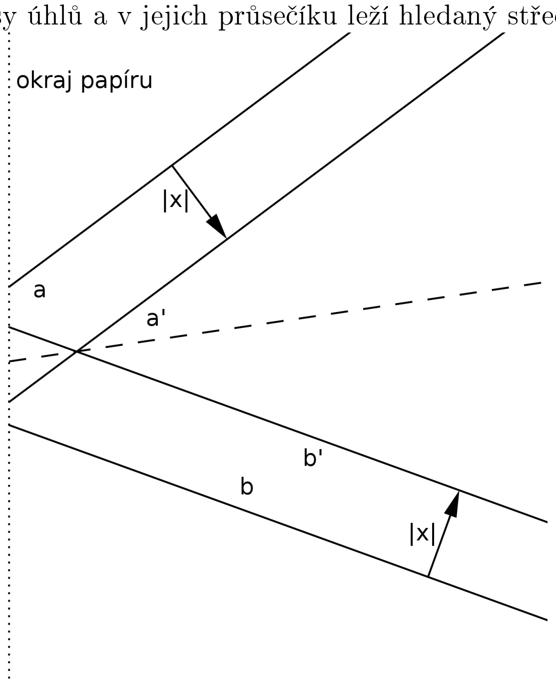
Termín odeslání: 28. listopadu 2011

autor: *Bori a Myreg*

Úloha 2.1. Už je podzim a Matěj se dneska rozhodl, že je správný čas na to, aby zoral svoje čtvercové políčko. Ale nebyl by to Matěj, kdyby to oral pěkně po řádcích. Jak po prvních 10 minutách pole vypadalo po Matějově zorání? Byly na něm tři zorané linky, každá začínala i končila na jednom z okrajů pole a žádné dvě se neprotínaly. Prodloužením těchto linek šlo získat trojúhelník, jehož vrcholy byly mimo pole. A Matěje hnedka napadlo, jak by se dal sestrojit střed kružnice vepsané tomuto trojúhelníku a už křičel na Liběnku, ať mu s tím příkladem jde pomoct. (Konstrukci smíte provádět pouze na poli.)

Řešení. Střed kružnice vepsané leží v průsečíku os úhlů trojúhelníku. Je tedy třeba najít (alespoň dvě) osy úhlů. Jak najít osu úhlu sevřeného dvěma přímkami, když nemáme k dispozici průsečík těchto přímek? Průsečík si vyrobíme! Stačí posunout obě přímky o stejnou délku „směrem do papíru“ (viz obrázek). Není těžké nahlédnout, že osa úhlu mezi nově vzniklými posunutými přímkami je shodná s tou původní (zřejmě půjde opět o osu úhlu a navíc bude shodná s původní, protože vzniklý čtyřúhelník je kosočtverec).

Nyní stačí konstrukci zopakovat pro ještě jednu dvojici stran trojúhelníka, najdeme dvě různé osy úhlů a v jejich průsečíku leží hledaný střed kružnice vepsané.



Úloha 2.2. Liběnka Matějův příklad hravě vyřešila a samozřejmě chtěla Matěje taky popíchnout nějakým příkladem a už vymýšlela. „Matěji, vidíš tamhle ty tři pampelišky,

jak ti tu krásně tvoří tojúhelník? Jenom pomocí kružítka nalezni patu kolmice z první pampelišky na přímku, kterou tvoří druhé dvě pampelišky, zvládneš to?“

Řešení. Označme tři pampelišky jako A, B a C. Chceme najít patu kolmice z C na úsečku AB. V zadání série jsme ukazovali, jak se dá jen pomocí kružítka nalézt střed mezi dvěma body. Ukážeme dvě různá řešení s odvoláním na tuto znalost.

1. Sestrojíme kružnice nad průměry AC a BC (k tomu potřebujeme nalézt středy úseček, což už ale umíme). Tyto kružnice se mimo C protínají ještě v jednom bodě, a to je hledaná pata kolmice (skutečně, jde o Thaletovy kružnice, a proto u průsečíku nalezneme pravý úhel).
2. Sestrojíme bod C', který je obrazem bodu C v osové souměrnosti podle úsečky AB. Nyní je již docela zřejmé, že střed úsečky CC' je hledanou patou a snadno jej nalezneme.

Úloha 2.3. A kde tou dobou vězel jejich tatínek Henry? Zrovna se pokoušel přijít na to, kde se tady vzaly ty kruhy v obilí. Byly dva a protínaly se. Po chvilce ho to přestalo bavit, beztak to byli zase nějací mimozemšťani a raději si sám pro sebe vymyslel úlohu. Dokážu pouze pomocí pravítka sestrojit střed jednoho z kruhů? (Mám k dispozici pouze pravítko bez rysky, které nemá ani měřítko, pouze umí vytvořit přímku procházející dvěma danými body.)

Řešení. *(volně podle Marka Karpilovského)* Idea konstrukce: Pokusíme se jedné kružnici vepsat lichoběžník. Tento lichoběžník bude zřejmě rovnoramenný, a proto snadno nalezneme osu základen, která evidentně prochází středem kružnice.

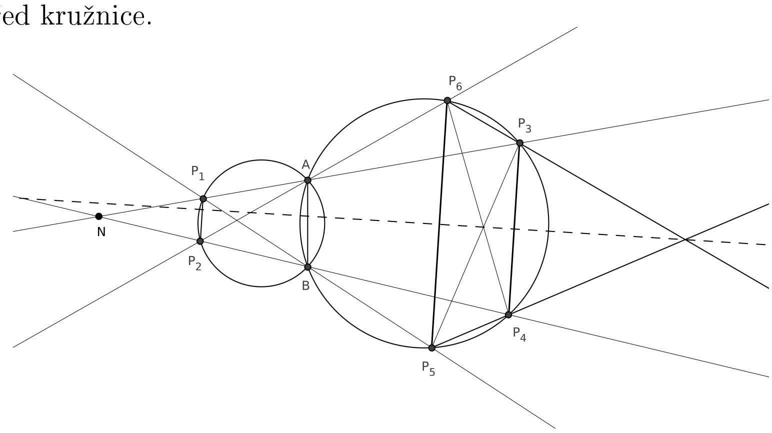
Označme si průsečíky kružnic jako A a B. Dále zvolme náhodně bod N (pokud chcete, aby se vám to kreslilo hezky, zvolte jej podobně jako my v přiloženém obrázku). Dále veďme přímky z bodu N skrz body A a B. Tyto přímky protnou první kružnici v bodech P_1, P_2 a druhou v P_3, P_4. Navíc ještě protněme přímku P_1B s druhou kružnicí za vzniku průsečíku P_5 a podobně obdržme bod P_6 jako průsečík druhé kružnice a přímky P_2A.

Čtyřúhelník $P_3P_4P_5P_6$ je (rovnoramenný) lichoběžník. Důkaz: Abychom o čtyřúhelníku $P_3P_4P_5P_6$ dokázali, že je lichoběžník, musíme dokázat, že strany P_3P_4 a P_5P_6 jsou rovnoběžné. My dokážeme, že $P_3P_4 \parallel P_1P_2$ a taky $P_5P_6 \parallel P_1P_2$. Poté už z tranzitivity rovnoběžnosti okamžitě vyplyne, že se jedná o lichoběžník.

- $P_3P_4 \parallel P_1P_2$. Označme $\sphericalangle P_1P_2B = \alpha$. Potom z vlastností tětivového čtyřúhelníku P_1P_2BA bude $\sphericalangle P_1AB = 180° - \alpha$, a tedy $\sphericalangle BAP_3 = \alpha$. Úplně stejnou fintu použijeme ještě jednou a odhalíme úhel svírající P_3P_4 s P_2P_4. Z tohoto už plyne rovnoběžnost, kterou jsme chtěli dokázat.
- $P_5P_6 \parallel P_1P_2$. Označme $\sphericalangle P_2P_1B = \beta$. Z vlastností tětivového čtyřúhelníku P_1P_2BA platí $\sphericalangle P_2AB = \beta$. Zřejmě doplněk $\sphericalangle BAP_6 = 180° - \beta$. Potom z vlastností tětivového čtyřúhelníka ABP_5P_6 znovu $\sphericalangle P_6P_5B = \beta$. Vidíme střídavé úhly a rovnoběžnost je opět dokázána.

Teď už víme, že $P_3P_4P_5P_6$ je lichoběžník. Navíc je vepsaný kružnici, takže zřejmě rovnoramenný lichoběžník. Najdeme osu jeho základen. Vzhledem k tomu, že jde o rovnoramenný lichoběžník, osa základen se dá nalézt snadno (viz jednoduchá konstrukce na obrázku). Víme, že osa tětivy prochází středem kružnice, proto naše osa taky prochází středem kružnice. Máme tedy přímku (na obrázku čárkovaně), která prochází hledaným středem.

Nyní už jen stačí celou konstrukci zopakovat ještě jednou s jinak zvoleným bodem N a velmi pravděpodobně dostaneme novou, různou osu. V jejich průsečíku bude ležet hledaný střed kružnice.



Úloha 2.4. Matěj s Liběnkou seděli po náročném orání a k tomu ještě přemýšlení s čajem na terase, když vzal Matěj najednou čtvercový papír $ABCD$ s délkou hrany 1 a začal ho roztodivně přehýbat. Nejprve ho přeložil na tři stejné části dvěma rovnoběžnými přehyby p,q. Následně papír zpřehýbal tak, aby se vrchol D přeložil na hranu AB a průsečík p s hranou CD se přeložil na přehyb q. A pak na Liběnku vychlil: „Dokaž, že $\frac{|D'B|}{|AD'|} = \sqrt[3]{2}$, kde D' je obraz bodu D na hraně AB po přeložení. Že to nestihneš dřív, než si nachystám svačinu?“ Pomůžete trochu Liběnce, ať se Matěj diví, jak je šikovná?

Řešení. Označme body a délky podle obrázku: $|AD'| = x$, $|D'B| = y$, $AE = z$. Chceme dokázat, že

$$\frac{y}{x} = \sqrt[3]{2} <==> y^3 = 2x^3$$

Jelikož $|AE| + |ED'|$ je původní délka strany čtverce, můžeme $|ED'|$ vyjádřit jako $x + y - z$. Z Pythagorovy věty v trojúhelníku AED' pak plyne

$$\begin{aligned}(x+y-z)^2 &= x^2+z^2\\ z &= \frac{2xy+y^2}{2(x+y)}\end{aligned}$$

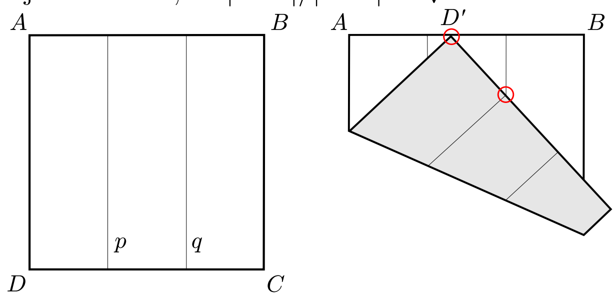
Dále snadným dopočítáním úhlů v trojúhelnících dostáváme $|\angle AED'| = \pi/2 - |\angle ED'A| = |\angle FD'G| = \pi/2 - |\angle D'GF|$. Odtud plyne, že trojúhelníky AED' a $FD'G$ jsou podobné. Délka $|D'G|$ je třetina strany čtverce, tedy $\frac{x+y}{3}$. Podobně $|D'B| = y - \frac{x+y}{3}$.

$$\begin{aligned}
\frac{x+y-z}{z} &= \frac{\frac{x+y}{3}}{y-\frac{x+y}{3}} \\
x+y-z &= z\cdot\frac{x+y}{2y-x} \\
x+y &= z\cdot\left(\frac{x+y}{2y-x}+1\right) \\
\frac{(x+y)(2y-x)}{3y} &= z
\end{aligned}$$

Porovnáním získaných dvou vyjádření z dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{(x+y)(2y-x)}{3y} &= \frac{2xy+y^2}{2(x+y)} \\
2(x+y)^2(2y-x) &= 3y^2(2x+y) \\
4x^2y-2x^3+8xy^2-4x^2y+4y^3-2y^2x-6xy^2-3y^3 &= 0 \\
y^3 &= 2x^3
\end{aligned}$$

Tím je dokázáno, že $|D'B|/|AD'| = \sqrt[3]{2}$.



Úloha 2.5. Kouma s Ňoumou seděli takhle večer u televize a tam běžel nějaký zvláštní pořad. Okolo kulatého stolu tam seděla v libovolném pořadí přirozená čísla 1 až 10. A Koumovi to nedalo a už dával úkoly Ňoumovi: „Ňoumo, dokaž, že zde existuje číslo, které v součtu se svými sousedy dává alespoň 17. A platí to i pro 18? A co pro 19?“

Řešení. Dokážeme, že existuje číslo, které se svými sousedy dává součet 18. Platnost pro 17 je pak přímý důsledek.

Pro spor předpokládejme, že žádné takové není. Všechna čísla kromě 1 můžeme po kruhu rozdělit do 3 sousedících trojic. Pokud není součet žádného číslo s jeho sousedy 18, tak součet každé trojice musí být nejvýše 17. Celkový součet je tedy nejvýše $3\cdot 17+1 = 52$. Kolem stolu však sedí čísla 1 až 10, jejichž součet je $(11\cdot 10)/2 = 55$, což je spor.

Pro 19 již tvrzení neplatí. Protipříkladem je například usazení čísle po kruhu 1, 7, 3, 8, 5, 4, 9, 2, 6, 10, 1.

Úloha 2.6. Hnedka po vyřešení to kluci přepli radši na jiný kanál a tam byl zrovna fotbal. Hrál se fotbalový turnaj mezi 17 družstvy metodou každý s každým a hrál se tři dny. A to už Ňoumu zase napadly otázky pro Koumu: „Koumo, dokaž, že existují tři družstva, která sehrála všechny tři vzájemné zápasy ve stejný den.“

Řešení. Formulujme problém v teorii grafů. Máme úplný graf na 17 vrcholech (družstva), jehož hrany (zápasy) barvíme třemi barvami (den, kdy byl zápas odehrán). Úkolem je dokázat, že pro libovolné obarvení hran v grafu existuje jednobarevný trojúhelník.

Pro spor předpokládejme, že existuje obarvení hran tak, že v grafu jednobarevný trojúhelník není. Vyberme libovolný vrchol A. Z něj vede 16 hran, proto alespoň 6 z nich má stejnou barvu, označme ji a. Řekněme, že jsou to hrany do vrcholů $B_1, ..., B_6$. Žádná hrana $B_i- > B_j$ mezi těmito vrcholy nemůže mít barvu a, jinak bychom měli jednobarevný trojúhelník AB_iB_j. Úplný graf s 6 vrcholy $B_1, ..., B_6$ má tedy hrany obarvené jen dvěmi barvami. Dokážeme, že zde existuje jednobarevný trojúhelník.

Z B_1 vede 5 hran, proto alespoň 3 z nich mají stejnou barvu, označme ji b. Řekněme, že jsou to hrany do vrcholů C_1, C_2, C_3. Žádná hrana $C_i- > C_j$ mezi těmito vrcholy nemůže mít barvu b, jinak bychom měli jednobarevný trojúhelník $B_iC_iC_j$. Všechny 3 hrany mezi vrcholy C_1, C_2, C_3 tedy musí mít poslední třetí barvu. Pak ale tvoří jednobarevný trojúhelník, což je spor.

Úloha 2.7. Ani fotbalový příklad kluky nezaskočil a protože už v televizi nebylo vůbec nic zajímavého, tak se rozhodli, že se půjdou podívat ke Klevrům, co je nového. Otevřel jim Henry a hnedka hlásí: „Dovnitř smí jen ten, kdo dokáže, že posloupnost $2^n - 3$ obsahuje nekonečně mnoho čísel, z nichž každá dvě jsou nesoudělná.“

Řešení. Zkonstruujeme podposloupnost b dané posloupnosti, která je nekonečná a všechny její prvky jsou nesoudělné. Za její první prvek lze zvolit např. $b_1 = 2^2 - 3 = 1$, za druhý $b_2 = 2^5 - 3 = 29$. Každý další člen b_k spočteme na základě předchozích. Uvážíme součin všech předchozích členů, například pomocí vzorce $b_k = 2^{b_1!b_2!\cdots b_{k-1}!} - 3$, což je zjevně prvek dané posloupnosti. Zbývá ukázat, že toto číslo je nesoudělné se všemi b_i pro $i < k$. Budeme uvažovat zbytky, které dávají postupně mocniny $2, 2^2, 2^3, \ldots$ po dělení b_i (k-tý z nich označíme z_k). Možných zbytků je pouze $b_i - 1$ (mocnina dvojky nedá zbytek 0 po dělení lichým číslem), proto mezi prvními b_i zbyky najdeme dva shodné $z_m = z_{m+p}$, kde m, p jsou kladná celá čísla menší než b_i. Platí proto, že $b_i | 2^{m+p} - 2^m$, neboli $b_i | 2^m(2^p - 1)$. Protože je b_i liché, plyne odtud $b_i | 2^p - 1$. Protože je p menší než b_i, dělí $b_i!$ a proto i $b_1!b_2! \cdots b_{k-1}!$. Položme $pq = b_1!b_2! \cdots b_{k-1}!$. Máme pak $b_k - 2 = 2^{pq} - 1 - 2 = (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \cdots + 2^p + 1)$. Číslo na pravé straně je dělitelné b_i, proto b_i dělí levou stranu a kdyby dělilo b_k, muselo by dělit dvojku, což nelze.