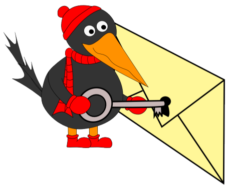
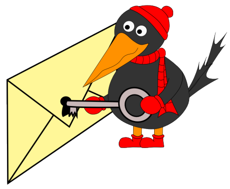


Řešení 1. série

Pravda a lež

autor: *Vlado a Zbyněk*



Úloha 1.1. *Klevrovi očekávali návštěvu a na stole už měli nachystané zákusky. Tři z nich však zmizely dříve, než návštěva přišla. Takto se vymlouvali:*

Liběnka: „Pokud měla zákusek Bubla, Matěj neměl.“

Bubla: „Liběnka snědla nejméně dva zákusky.“

Henry: „Pokud měl zákusek Matěj, donesl jeden i Buble.“

Matěj: „Děvčata žádné zákusky neměla.“

Ti, kdo žádné zákusky nesnědli, mluvili pravdu, ostatní mohli (ale nemuseli) lhát. Kdo snědl kolik zákusků, pokud každý zákusek snědl jeden z těchto čtyř lidí?

Řešení. Matej tvrdí, že dievčatá žiadne zákusky nemali. Obe dievčatá by tak museli hovoriť pravdu, pričom Bubla tvrdí, že Liběnka aspoň dva zákusky zjedla. To je samozrejme v rozpore s pôvodným Matejovým tvrdením, Matěj teda klame a aspoň jeden zákusok mal. Ak Bubla nemala zákusok a teda hovorí pravdu, Liběnka by zjedla dva zákusky a teda by už žiaden zákusok nezostal pre Henryho. Z Henryho tvrdenia by však vyplývalo, že jeden zákusok mala Bubla, čo je opäť spor. Bubla teda tiež aspoň jeden zákusok mala. Liběnkino svedectvo je tým pádom nepravdivé a dostávame sa tak k záveru - Matěj, Bubla a Liběnka zjedli po jednom zákusku.

Úloha 1.2. *Kouma s Ňoumou zatím hráli hru. Kouma si myslel dvě čísla a, b od 1 do 10, pro která platilo $a > b$. Ňouma v každém kole řekl, zda hádá $a + b$, nebo $a - b$ a tipnul si číslo. Kouma mu pak odpověděl, zda je odpověď správná, menší nebo větší. Na kolik pokusů mohl Ňouma čísla uhodnout? Ukažte, že mu daný počet pokusů stačí, ať si Kouma vybere jakákoliv čísla a, b.*

Řešení. Ňouma si bude pamatovat množinu dvojic, které odpovídají dosavadním odpovědím. Každou otázkou tuto množinu rozdělí na tři části. Proto mu jedna otázka stačí na rozlišení nejvýše tří dvojic, dvě otázky na rozlišení nejvýše devíti, tři otázky na 27. Zkusme nyní hledat strategii, jak dvojici uhodnout na čtyři dotazy. Je třeba rozebrat dva případy:

První otázka je na součet. Vypsáním všech možností zjistíme, že součty jsou zastoupeny po řadě v 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 4, 4, 3, 3, 2, 2, 1, 1 dvojicích. Pokud Kouma vybral součet 11, rozdělí možné dvojice na skupiny o velikostech 20, 5 a 20. Případ, kdy Kouma na první pokus uhodne součet není kritický – každý součet je zastoupen nejvýše pětkrát a je snadné tak hledanou dvojici dvěma dalšími otázkami určit. Důležitá je velikost zbylých skupin, konkrétně větší z nich. Ta bude minimální, pokud Ňouma vybere součet 11 (zbude mu 20 možností). Rozmyslíme, že rozdíly mají pro dvojice v dvacetiprvkové skupině stejné četnosti, jako součty. Druhou otázkou tak může Kouma rozdělit množinu na podmnožiny o velikostech 8, 3, 9 (jakékoliv jiné dělení mu dá jednu množinu větší než 9, na což mu zbývající dvě otázky nestačí). Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že Ňouma rozdělil množinu na 8, 3 a 9 dvojic podle součtu. Ani nyní však nemá vyhráno, protože skupina o osmi prvcích není rozdělitelná na jednotlivé prvky pomocí dvou otázek (pokud žádná z otázek není na součet, jsou třeba tři otázky na rozdíl, pokud se na součet zeptá, zbudou mu čtyři a čtyři možnosti, tedy potřebuje ještě dvě otázky). Ověřili jsme tak, že pokud je první otázka na součet, nemohou čtyři otázky stačit.

První otázka je na rozdíl. Ta může dvojice rozdělit na 17, 7 a 21 (zeptá-li se na rozíl 3) nebo na 24, 6 a 15 (zeptá-li se na rozdíl 4). Bohužel ale není možné na tři otázky dohledat konkrétní dvojici ani pokud víme, že je rozdíl 1 nebo 2 (pokud se na rozdíl zeptá, potřebuje tři otázky na součet; pokud se nezeptá, potřebuje čtyři – dvěma otázkami stejného typu je totiž možno rozdělit pouze 7 dvojic, třemi otázkami stejného typu 15, Ňouma by ale potřeboval rozdělit 9 resp. 17). Ani v tomto případě tak nestačí čtyři otázky.

Nyní popišme jeden ze způsobů, jak se na 5 otázek doptat. Výše jsme uvedli, že pomocí dvou otázek lze nejprve oddělit pět dvojic a pak zbylé dvojice rozdělit do množin po 8, 9 a 3 dvojicích. Výběr z oné osmiprvkové množiny pomocí tří otázek je rovněž popsán výše, výběr z pětiprvkové a trojprvkové je snadný. Zbývá rozmyslet, jak lze pomocí tří otázek vybrat správnou dvojici z devíti, které jsou vymezeny např. tím, že mají součet menší než 8. Součet je mezi 3 a 8, zjistíme ho na dvě otázky. Každému součtu odpovídají nejvýše tři dvojice, na určení konkrétní dvojice tak stačí jedna další otázka.

Tím jsme konečně dokázali, že je hledaný minimální počet otázek roven pěti.

Úloha 1.3. *„Paktéžkoliv ostatní zákusky nesníte, pustím se do nich, zbude na vás," pronesl Henry. Děti se tvážily trochu zmateně a tak jim vysvětlil, že „paktéžkoliv" je logická spojka spojující tři věty, která říká, že pokud platí první, pak současně platí druhá a neplatí třetí. Matematicky se značí symbolem* $\otimes$ *a pomocí běžných spojek ji dokážeme zapsat takto* $\otimes(A, B, C) = A \Rightarrow (B \wedge \neg C)$. *Pak dal dětem za úkol dokázat, že vše, co lze vyjádřit pomocí* $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ *lze vyjádřit pomocí této jedné parádní spojky.*

Řešení. Z pomocného texte vieme, že spojkami $\neg$, $\wedge$ a $\vee$ vieme vyjadriť ľubovoľný výrok. Ďalej použitím dvojitej negácie a De Morganovho pravidla vieme ľubovoľnú konjunkciu vyjadriť za pomoci disjunkcie a negácie. Stačí teda vyjadriť tieto dve spojky pomocou spojky "paktéžkoliv". To urobíme nasledovne:
$\neg A = \otimes(A, A, A)$
$A \vee B = \otimes(\otimes(A, A, A), B, A)$

Úloha 1.4. *Do Hloupětína zavítala trojčlenná delegace z Logistánu – pan Poctivý, pan Falešný a pan Pošetilý. Pan Poctivý vždy říkal pravdu, pan Falešný vždy lhal a pan Pošetilý odpovídal na otázky náhodně. Bohužel nikdo nevěděl, který je který. Další problém byl v tom, že mluvili Logistánsky. Na otázky odpovídali vždy „Puf" nebo „Huf", ale nikdo z Hloupětína nevěděl, které ze slov znamená ano a které ne. Kouma dostal v rámci diskuse možnost zeptat se na tři otázky (každou jen jednoho, ale libovolného kandidáta). Jak se má ptát, aby zjistil identitu všech kandidátů?*

Řešení. Nech Q je ľubovoľný výrok. Uvážme takúto otázku: "Keby som sa vás spýtal, či je výrok Q pravdivý, odpovedali by ste "Puf"?". Po krátkej uváhe ľahko zistíme, že ak sa túto otázku spýtame pána Poctivého alebo Falošného, bez ohľadu na význam slov "Puf"a "Huf"bude odpoveď "Puf"implikovať pravdivosť výroku Q a odpoveď "Huf", naopak, jeho nepravdivosť.
Troch delegátov si môžme ľubovoľne očíslovať. Najprv sa spýtame prvého: "Keby som sa vás spýtal, či je druhý pán Pošetilý, odpovedali by ste "Puf"?". Ak bude odpoveď na túto

otázku "Puf", buď je skutočne druhý pán Pošetilý, alebo bol Pošetilým prvý pán, ktorého sme sa pýtali. Ak bude odpoveď "Huf", buď druhý pán naozaj Pošetilý nie je, alebo, ako v predošlom prípade, Pošetilý je samotný prvý pán. V oboch prípadoch o jednom kandidátovi určite vieme, že Pošetilý nebude (v prvom prípade o treťom, v druhom prípade o druhom).
Takto vylúčeného pána sa spýtame: "Keby som sa vás spýtal, či je prvý pán Pošetilý, odpovedali by ste "Puf"?". Podľa odpovede teraz s istotou vieme usúdiť, ktorý pán je Pošetilý. Poslednú otázku položíme tomu istému pánovi, ktorému sme položili aj druhú: "Keby som sa vás spýtal, či ste pán Poctivý, odpovedali by ste "Puf"?". Na základe odpovede určíme jeho identitu a posledného pána ľahko identifikujeme vylučovacou metódou. Našli sme tak pre Koumu postup, ktorým vždy správne odhalí totožnosť všetkých troch kandidátov.

Úloha 1.5. *Ptal se Kouma Ňoumy, jaká jsou jeho oblíbená čísla, a Ňouma pravil: „Mám rád všechna taková přirozená čísla, v nichž každá cifra je větší než všechny napravo od ní.“ Kolik je Ňoumových oblíbených čísel?*

Řešení. Každou neprázdnou množinu cifer různou od $\{0\}$ lze uspořádat od největší k nejmenší a přečíst jako číslo, takové číslo má jistě požadovanou vlastnost. Dvě různé množiny dají různá čísla. Navíc každé vyhovující číslo má všechny cifry různé a alespoň jednu nenulovou, jeho cifry proto tvoří neprázdnou množinu různou od $\{0\}$. Zbývá spočítat, kolik je množin cifer. Pro každou cifru se můžeme rozhodnout, zda ji do množiny dáme či nikoliv, tyto dvě volby máme pro každou z desti cifer nezávisle, což nám dává $2^{10} = 1024$ množin. Po odečtení prázdné množiny a $\{0\}$ tak máme výsledný počet 1022. Zadání lze chápat i tak, že se jednociferná čísla nepočítají – pak by byl výsledek 1013.

Úloha 1.6. *Ptal se Ňouma Koumy, jaká jsou jeho oblíbená čísla, a Kouma pravil: „Mně se přirozené číslo n líbí, pokud $9^n - 2 \cdot 3^n + 1$ dělí číslo $3^{n(3^n-1)} - 1$.“ Ňoumovi hned došlo, že se Koumovi vlastně líbí všechna přirozená čísla, ale neuměl to dokázat. Pomůžete mu?*

Řešení. Ve druhém výraze se objevuje $3^n - 1$, první lze upravit na $(3^n - 1)^2$. Položme tedy $t = 3^n - 1$. Máme pak dokázat, že pro takové t platí $t^2 | (3^n)^t - 1$, neboli $t^2 | (t+1)^t - 1$. Výraz $V = (t+1)^t$ rozepíšeme z binomické věty jako $V = t^t + \binom{t}{1} t^{t-1} + \cdots + \binom{t}{t-1} t + 1$. Všimneme si, že ze všech členů kromě posledního lze vytknout t^2. Máme tak $V = kt^2 + 1$ pro nějaké k, výraz $V - 1 = kt^2$ je proto dělitelný t^2, což jsme chtěli dokázat.

Úloha 1.7. *Zatímco Ňouma koumal, cvičil si Kouma rýsování opsaných kružnic. Nejprve narýsoval kružnici opsanou trojúhelníku ABC, následně opsal kružnici trojúhelníku DEF, kde D, E, F jsou středy stran trojúhelníka ABC. Byl tuze překvapen, že měly vzniklé kružnice vnitřní dotyk. Dokažte, že oba Koumovy trojúhelníky jsou pravoúhlé.*

Řešení. Stejnolehlost se středem v těžišti a koeficientem $-\frac{1}{2}$ zobrazí trojúhelník ABC na DEF a tedy i kružnici opsanou ABC na kružnici opsanou DEF. Existuje i druhá stejnolehlost, která zobrazí první kružnici na druhou – ta má koeficient $\frac{1}{2}$ a střed v průsečíku výšek H trojúhelníka ABC (to je ekvivalentní tomu, že obrazy H podle středů stran leží na kružnici opsané ABC, což je tvrzení známé a my jej ponecháme čtenáři jako cvičení). Pokud mají dvě kružnice vnitřní dotyk, musí být bod dotyku jedním ze středů stejnolehlosti. Zřejmě těžiště tímto bodem být nemůže, neboť vždy leží uvnitř ABC a kružnice leží vně (případ, kdy by těžiště bylo jezdím z bodů A, B, C není třeba uvažovat, neboť pak by šlo o trojúhelník degenerovaný). Bod H je proto dotykovým bodem a leží na kružnici opsané $\triangle ABC$. Předpokládejme, H je bod různý od A a že leží na oblouku AC, který neobsahuje B. Podle věty o obvodových úhlech pak $|\angle BCA| = |\angle BHA|$. Přitom paty výšek na strany AC a BC tvoří spolu s body H a C tětivový čtyřúhelník (dva protější úhly jsou pravé), proto $|\angle BCA| + |\angle BHA| = 180°$. Máme tak $|\angle BCA| = 90°$, trojúhelník je proto pravoúhlý.