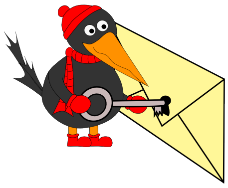
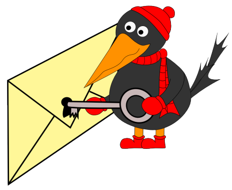


Řešení 6. série

FUNKCIONÁLNÍ ROVNICE



Úloha 6.1.

Zas je tu, jaro je tu, lidi šílí, líbaj se jak o život navzájem… hraje z rádia a Liběnka už hledá Mateje. Kde jen může být? Že by venku pod rozkvetlou třešní? Rychle mrkne na zahradu. Ano, je tam a běží za ním. „Matěji, já jsem ráno četla v Hloupětínském zpravodaji, že na prvního máje musí holce nějaký kluk vyřešit funkcionální rovnici, aby neuschla. Tak já tu pro tebe jednu mám: najdi všechny funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující*

$$f(x) + f(2y) = f(2x + y)$$

pro všechna reálná x, y.*“*

Řešení. Pokud za y dosadíme $-x$, dostaneme

$$f(x) + f(-2x) = f(x),$$

tedy $f(-2x) = 0$. Pro každé číslo t, které lze psát ve tvaru $-2x$ máme $f(t) = 0$. V takovém tvaru lze ale psát všechna reálná čísla t (stačí vzít $x = -\frac{t}{2}$), jediná funkce, která může vyhovět je proto $f(x) = 0$. Dosazením do zadané rovnice dostáváme $0+0 = 0$, funkce proto vyhoví.

Úloha 6.2. *Láska je láska, když choděj kluci s holkama… Matěj se venku prochází pod rozkvetlou třešní a přemýšlí nad Liběnčinou úlohou. Najednou ho to napadne, vždyť je to tak snadné, ale stejně jí to nedaruje. „Liběnko, já jsem zase četl, že když ten kluk té holce rovnici vyřeší, tak jí musí taky jednu dát!“ „Tak dávej Matěji,“ vyhrkla rozesmátá Liběnka. „Najdi všechny funkce* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *splňující* $f(1) = 1$ *takové, že pro všechna reálná* x, y *platí*

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(f(y)) + 3xy^6 + 3x^2 f(y).\text{“}$$

Řešení. Nejprve za x dosadíme $f(t)$, máme

$$f(f(t) + f(y)) = f(f(t)) + f(f(y)) + 3f(t)y^6 + 3f(t)^2 f(y),$$

po úpravě

$$f(f(t) + f(y)) - f(f(t)) - f(f(y)) = 3f(t)y^6 + 3f(t)^2 f(y).$$

Levá strana se nezmění záměnou t a y, nezmění se proto ani pravá a platí

$$3f(t)y^6 + 3f(t)^2 f(y) = 3f(y)t^6 + 3f(y)^2 f(t),$$

po dosazení $y = 1$ pak

$$3f(t) + 3f(t)^2 = 3t^6 + 3f(t),$$

odtud $f(t)^2 = t^6$, tedy pro každé t je buď $f(t) = t^3$ nebo $f(t) = -t^3$.

Nyní do zadané rovnice dosadíme $y = 1$:

$$f(x+1) = f(x) + 1 + 3x + 3x^2.$$

Kdyby pro nějaké r platilo $f(r) = -r^3$, muselo by být z této rovnice $f(r+1) = -r^3 + 1 + 3r + 3r^2$. Rovnost $f(r+1) = -(r+1)^3$ přitom nastat nemůže (rovnice $-(r+1)^3 = -r^3 + 1 + 3r + 3r^2$ je po úpravě kvadratická a nemá reálné kořeny), druhá možnost, $f(r+1) = (r+1)^3$, vede na rovnici $(r+1)^3 = -r^3 + 1 + 3r + 3r^2$, po úpravě $r^3 = 0$.

Jediné r, pro které může být $f(r) = -r^3$ je proto 0, pro nulu je to ale ekvivalentní se zápisem $f(0) = 0^3$. Tímto jsme dokázali, že je pro všechna x nutné, aby platilo $f(x) = x^3$. Zkouškou ověříme, že je to i dostatečné, tedy že funkce $f(x) = x^3$ je řešením zadané rovnice.

Úloha 6.3.

Ani Henry nezahálí a otevírá všechna okna dokořán, poslouchá zpěv ptáčků a přemýšlí nad úlohou, co mu včera přinesl jeho kamarád. Kdyby ji nevyřešil, tak by se asi hodně styděl, pomůžete mu? Dostal za úkol najít všechna přirozená n taková, že existuje monotónní funkce f splňující $f(1) = 42$ a

$$\underbrace{f(f(\ldots f(}_{n}x)\ldots) = x.$$

Řešení. Pro $n = 2$ je takovou funkcí zřejmě $f(x) = 43 - x$. Protože dvojím aplikováním funkce dostaneme původní argument, je tato funkce řešením pro všechna sudá n.

Pro lichá n chceme ukázat, že taková funkce neexistuje. Nejprve si uvědomíme, že je-li $f(x) = f(y)$, je $x = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{n}x)\ldots) = \underbrace{f(f(\ldots f(}_{n}y)\ldots) = y$, funkce je proto prostá a tudíž buď rostoucí, nebo klesající. V prvním případě z nerovnosti $42 = f(1) > 1$ plyne $f(f(1)) > f(1)$, $f(f(f(1))) > f(f(1))$, atd. pro všechna n tedy

$$\underbrace{f(f(\ldots f(}_{n}1)\ldots) > \underbrace{f(f(\ldots f(}_{n-1}1)\ldots) > \cdots f(1) > 1,$$

což je spor. Funkce f proto musí být klesající. Proto $f(1) > 1$, $f(f(1)) < f(1)$, $f(f(f(1))) > f(f(1))$, $\underbrace{f(f(\ldots f(}_{n+1}1)\ldots) < \underbrace{f(f(\ldots f(}_{n}1)\ldots)$. V poslední nerovnosti je $<$, neboť znaménka se pravidelně střídají a n liché. Pravá strana poslední rovnosti je ale 1 a levá $f(1) = 42$, máme tak $42 < 1$, což je spor. Tím jsme dokázali, že funkce s danými vlastnostmi existuje, právě když je n sudé.

Závěrem doplňme, že podmínka $f(f(x)) = x$ je v kombinaci se zadanými podmínkami pro sudá n nejen dostatečná, ale – jak někteří z vás dokázali – i nutná. Krom „pěkné" funkce $f(x) = 43 - x$ jí vyhoví například všechny funkce

$$f(x) = \begin{cases} r(a_r - x) + a_r & x > a_r \\ \frac{1}{r}(a_r - x) + a_r & \end{cases},$$

kde $r > 0$ a $a_r = \frac{42r+1}{r+1}$.

Úloha 6.4.

Matěj samozřejmě věděl, že je to s tou prvomájovou tradicí úplně jinak, a tak nechal Liběnku Liběnkou a pospíchal za Bublou. Už se ji chystal políbit, když jej překvapila otázkou: „Víš, co jsem četla ráno v Hloupětínském zpravodaji?“ Matěj si povzdychl, vytáhl z kapsy papír a tužku a začal si psát:

Nechť $c(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2011}\right)$, $s(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2011}\right)$ *a* $M = \mathbb{R} \setminus \{\mathrm{cotg}(\frac{k\pi}{2011}) | k \in \mathbb{Z}\}$. *Najdi všechny funkce* $f : M \to \mathbb{R}$ *splňující pro všechna* x *z definičního oboru rovnost*

$$f\left(\frac{c(1)x - s(1)}{s(1)x + c(1)}\right) + f\left(\frac{c(2)x - s(2)}{s(2)x + c(2)}\right) = \frac{c(5)x - s(5)}{s(5)x + c(5)} - \frac{c(3)x - s(3)}{s(3)x + c(3)}.$$

Řešení. Každé číslo lze jistě psát ve tvaru $x = \mathrm{cotg}(t)$. Takováto substituce je výhodná, neboť pro $d = \frac{\pi}{2011}$ platí

$$\frac{c(k)\,\mathrm{cotg}(t) - s(k)}{s(k)\,\mathrm{cotg}(t) + c(k)} = \frac{\frac{c(k)\cos t - s(k)\sin t}{\cos t}}{\frac{s(k)\cos t + c(k)\sin t}{\cos t}} = \frac{c(k)\cos t - s(k)\sin t}{s(k)\cos t + c(k)\sin t} =$$
$$= \frac{\cos(t + kd)}{\sin(t + kd)} = \mathrm{cotg}(t + kd).$$

Po provedení substituce přejde zadaná rovnice do tvaru

$$f(\mathrm{cotg}(t + d)) + f(\mathrm{cotg}(t + 2d)) = \mathrm{cotg}(t + 3d) - \mathrm{cotg}(t + 5d).$$

Když do této rovnice dosazujeme za t postupně $x - d, x, x + d, x + 2d, \ldots, x + 2009d$, dostáváme s využitím periodicity funkce cotg (t.j. $\mathrm{cotg}(x + 2011d) = \mathrm{cotg}(d)$) soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{cotg}(x)) + f(\mathrm{cotg}(x + d)) &= \mathrm{cotg}(x + 4d) - \mathrm{cotg}(x + 2d)\\
f(\mathrm{cotg}(x + d)) + f(\mathrm{cotg}(x + 2d)) &= \mathrm{cotg}(x + 5d) - \mathrm{cotg}(x + 3d)\\
f(\mathrm{cotg}(x + 2d)) + f(\mathrm{cotg}(x + 3d)) &= \mathrm{cotg}(x + 6d) - \mathrm{cotg}(x + 4d)\\
&\vdots\\
f(\mathrm{cotg}(x + 2010d)) + f(\mathrm{cotg}(x)) &= \mathrm{cotg}(x + 3d) - \mathrm{cotg}(x + d)
\end{aligned}$$

Vzhledem k definičnímu oboru f můžeme do výše uvedených rovnic dosazovat pouze čísla různá od násobků $\frac{\pi}{2011}$. Díky tomu jsou všechny hodnoty cotg definované.

Když tyto rovnice vynásobíme střídavě čísly 1 a -1 a výsledky sečteme, dostaneme na levé straně $2f(\mathrm{cotg}(x))$. Na pravé straně se zruší všechny členy krom $2\,\mathrm{cotg}(x + 2d)$ a $2\,\mathrm{cotg}(x + 3d)$. Dostáváme tak $f(\mathrm{cotg}(x)) = \mathrm{cotg}(x + 3d) - \mathrm{cotg}(x + 2d)$, neboli

$$f(x) = \mathrm{cotg}(\mathrm{arccotg}\, x + 3d) - \mathrm{cotg}(\mathrm{arccotg}\, x + 2d).$$

To lze přepsat jako $f(x) = \frac{c(3)x - s(3)}{s(3)x + c(3)} - \frac{c(2)x - s(2)}{s(2)x + c(2)}$.

Úloha 6.5.

V posledních několika letech se Lenošín pěkně rozrostl, a to jak do počtu obyvatel, tak i o mnoho nových náměstí. To, o kterém vám povíme dnes, má uprostřed trojúhelníkovou kašnu (označme její vrcholy A, B, C). V její blízkosti, konkrétně v bodech P a L, se nachází sochy lenošínských patronů – svatého Prokrastiniána a Letargiána. Víme, že čtyřúhelníky $ABLC$ a $ABCP$ jsou konvexní a že platí následující rovnosti úhlů:

$$|\angle BCL| = |\angle ACP| = 40^\circ,$$
$$|\angle LBC| = |\angle CAP| = 70^\circ.$$

Dokažte, že $|AL| = |BP|$.

Řešení. V trojúhelnících BLC a PAC jsou součty úhlů 180°. Odtud dopočítáme úhly $|\angle CLB| = |\angle CPA| = 70^\circ$. Trojúhelníky PAC a BLC jsou proto rovnoramenné s úhlem při hlavním vrcholu C rovným 40°. Bod A vznikne otočením P okolo C o 40°, bod L otočením B okolo C o stejný úhel. Proto je úsečka PB otočením AL a má stejnou délku, což jsme chtěli dokázat.

Místo otočení šlo argumentovat i shodností podle věty *sus* – trojúhelníky ALC a PBC mají dvě dvojice stejně dlouhých stran (díky rovnostrannosti PAC a BLC) a společný úhel $|\angle ACB| + 40^\circ$ u vrcholu C, jsou proto shodné a mají stejně dlouhou i zbývající stranu AL resp. BP.

Úloha 6.6.

Kouma s Ňoumou lenošili tou dobou na zahrádce a počítali pokoutníky (p), květopasy (q), rybenky (r), sklípkany (s), tesaříky (t), užovky (u) a vodomily (v). Zjistili, že všechna spočtená čísla jsou prvočísla (ne nutně různá) a splňují rovnost

$$p^3 - p = q^2 + r^2 + s^2 + t^2 + u^2 + v^2.$$

Určete, kolik kterých živočichů napočítali.

Řešení. Nejprve si uvědomíme, že každá z druhých mocnin na pravé straně je alespoň rovna 4, pravá strana musí být alespoň 24 a proto nemá cenu uvažovat případ $p = 2$. Proto je p liché prvočíslo. Na levé straně máme součin $(p-1)(p+1)p$, kde $p-1$ a $p+1$ jsou dvě po sobě jdoucí sudá čísla – jedno je dělitelné dvěma, druhé dokonce čtyřmi, levá strana je dělitelná osmi.

Každé liché číslo lze psát ve tvaru $4k \pm 1$, jeho druhá mocnina je pak $16k^2 \pm 8k + 1$, tedy číslo dávající zbytek 1 po dělení 8. Pokud je k z čísel q, r, s, t, u, v lichých, je zbylých $6 - k$ čísel rovných dvěma. Pravá strana tak po dělení osmi dává stejný zbytek jako $k + 4(6 - k) = 24 - 3k$. Odtud vidíme, že k musí být dělitelné osmi, protože ale $k \leq 6$, vyhoví jedině $k = 0$. Máme tak $q = r = s = t = u = v = 2$. Pravá strana se musí rovnat 24, což nastane pro $p = 3$ (protože je funkce $p^3 - p$ pro $p > 1$ rostoucí, jde o jediné řešení).

Pokoutníci byli tři, ostatní živočichové byli vždy zastoupeni v párech.

Úloha 6.7.

Liběnka upekla čtvercovou buchtu a umístila na ni 99 hrozinek. Dávala si přitom záležet, aby každé dvě měly od sebe vzdálenost alespoň centimetr. Po chvilce vůně buchty přilákala Matěje, který dostal náramnou chuť na hrozinky. Liběnka mu dovolila jich několik vyloupnout, ale pod podmínkou, že každé dvě vyloupnuté hrozinky budou mít od sebe vzdálenost alespoň $\sqrt{3}$ centimetrů. Protože šlo o jídlo, přišel Matěj velmi rychle na to, jak ukořistit maximální počet hrozinek. Dokažte, že se mu jich povedlo získat alespoň jedenáct.

Řešení. Budeme chtít (indukcí) dokázat, že z $9n$ hrozinek jich za daných podmínek lze vždy ukořistit n. Pro $n = 1$ to lze triviálně. Předpokládejme, že to lze pro $n = k$ a dokažme to pro $n = k + 1$.

Rozmístíme na buchtu $9(k + 1)$ hrozinek a uvážíme hrozinku A, která je nejblíže k levému okraji (v případě shody libovolnou z nich). Hrozinku vyloupneme, nejbližších 8 hrozinek označíme za nevyloupnutelné a ze zbylých $9k$ hrozinek vyloupneme nejvhodnějších k. Správné vzdálenosti mezi posledními k vyloupnutými hrozinkami máme z indukčního předpokladu, zbývá dokázat, že i první hrozinka má od všech ostatních vyloupnutých správnou vzdálenost. Protože víme, že jsme nevyloupli žádnou z osmi k ní nejbližších, stačí nám dokázat, že jedna z těchto osmi je od ní ve vzdálenosti alespoň $\sqrt{3}$.

Pro spor předpokládejme, že všech osm nejbližších hrozinek má od A vzdálenost nejvýše $\sqrt{3}$. Pokud první hrozinku spojíme s osmi nejbližšími, dostaneme sedm úhlů, jejichž součet je nejvýše $180°$, jeden z úhlů je tak jistě menší než $30°$. Hrozinky určující tento úhel označme B, C. Protože $|\angle ACB| < 30°$, z kosinové věty pro trojúhelník ABC je $a^2 < b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc = (b - \frac{\sqrt{3}}{2}c)^2 + \frac{c^2}{4}$.

Nyní budeme hledat nejvyšší možnou hodnotu tohoto výrazu. Při substituci $x = \frac{c}{2}$, $y = b - \frac{\sqrt{3}}{2}c = b - \sqrt{3}x$ chceme maximalizovat $x^2 + y^2$. Pokud bychom uvažovali bod (x, y) v kartézském souřadném systému, je výraz $x^2 + y^2$ druhou mocninou jeho vzdálenosti od počátku. Ze zadání víme, že $b \geq 1$ a $c \geq 1$, předpokládáme $b \leq \sqrt{3}$, $c \leq \sqrt{3}$, což znamená $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $1 - \sqrt{3}x \leq y \leq \sqrt{3} - \sqrt{3}x$. Tyto čtyři nerovnosti omezují množinu možných poloh bodu (x, y) na rovnoběžník. Vrcholy rovnoběžníku vyčíslíme jako průsečíky přímek, na nichž leží jeho strany, dostaneme body $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}, 1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3} - \frac{3}{2})$. Druhé mocniny vzdáleností od počátku jsou pro tyto body po řadě 1, 1, $2 - \sqrt{3}$, $6 - 3\sqrt{3}$. Snadno ověříme, že všechna tato čísla jsou nejvýše 1, tedy všechny vrcholy rovnoběžníku leží v kruhu se středem v počátku a poloměrem 1 a proto v tomto kruhu leží i celý rovnoběžník. Maximální hodnota výrazu $x^2 + y^2 = b^2 + c^2 - \sqrt{3}bc$ je proto 1.

Protože je tento výraz ostrým horním odhadem pro a^2, máme $a < 1$, což je kýžený spor.