Řešení 5. série

# Invarianty

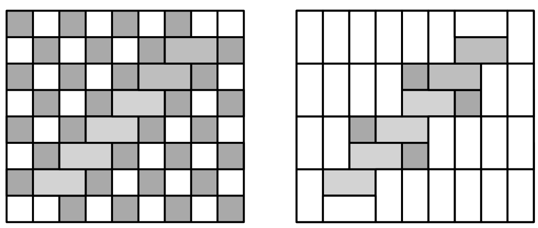
**Úloha 5.1.** *A začalo nám jaro. Sluníčko svítí, tráva se začíná zelenat, Liběnka vyběhla ven s míčem: „Matěji, pojď si házet.“ „Nemůžu, počítám jamky!“ Matěj seděl na trávníku, přes sebou měl 2011 jamek a mezi nimi čáry vyryté tak, aby byly všechny jamky spojené do jednoho mnohoúhelníku. „Liběnko, co myslíš, existuje přímka, která bude protínat všechny hrany v tomto mnohoúhelníku?“*

**Řešení.** Správná odpověď byla překvapivě záporná. Označme jamky $J_1$, $J_2$, …, $J_{2011}$, postupně v tom pořadí, v jakém jsou pospojované do mnohoúhelníku. Pro spor předpokládejme, že existuje přímka, která opravdu protíná všech jeho 2011 hran. Ta dělí rovinu na dvě poloroviny, kterým budeme pro jednoduchost říkat levá a pravá. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $J_1$ leží v levé polorovině. Jelikož přímka protíná i úsečku $J_1J_2$, musí nutně ležel $J_2$ na pravé straně. Ze stejného důvodu musí být $J_3$ opět nalevo, $J_4$ napravo a tak dále. Obecně dostáváme, že liché jamky jsou na levé, zatímco sudé na pravé straně. Přímka proto nemůže protínat úsečku $J_1J_{2011}$, což je spor s předpokladem, že protíná všechny hrany.

**Úloha 5.2.** *„To je snadné Matěji,“ řekla po vyřešení Matějova problému Liběnka. „Mám pro tebe lepší příklad!“ Před jejich domem jim Henry vydláždil obdélník $8 \times 9$, jak vidíte na obrázku. Aby to nebylo jen tak obyčejné, ozdobil jej 6 dvojkostkami. „Matěji, jaký je největší počet dvojkostek, které lze ještě umístit do našeho vydlážděného obdélníku?“ (Dvojkostky mohou být položeny pouze svisle nebo vodorovně, musí zakrývat právě dva sousední čtverce a samozřejmě už nesmí být položeny tam, kde už nějaké jsou.) Poradíte Matějovi, kolik jich může použít?*

**Řešení.** Vyskládaná úhlopříčka dělí obdélník na dva „trojúhelníky“. Jednu z nich obarvíme šachovnicovým způsobem a druhou obarvíme symetricky, tedy tak, že se šachovnicový vzor v rozích poruší, viz obrázek. Jelikož spolu nikde nesousedí dvě černá pole, každá přidaná dvojkostka pokryje alespoň jedno bílé pole.

Bílých polí je celkem 28, nelze tedy umístit více než 28 dvojkostek. Nyní je důležité ukázat, že 28 je možných. Můžete se tak přesvědčit na druhém obrázku.



Jiný možný postup vedoucí k cíli je obarvení celé plochy šachovnicovým způsobem a rozebrání situací v rozích. Přístup výše je ale přímější a průhlednější.

**Úloha 5.3.** *Poté, co děti položily kostky, se jim už nechtělo moc hýbat a chtěly jen trochu přemýšlet, tak zaběhly za Henrym a začaly škemrat o nějaký příklad. A Henry se nenechal dlouho pobízet. Tak si představte, děti, množinu přirozených čísel od 1 do 2011. Budete se střídat. V každém kroku vybere jeden z vás nějaká dvě čísla $u$, $v$ a nahradí je číslem $2uv+u+v$. Po 2010 krocích vám zbude jediné číslo. A na vás teď bude určit množinu všech čísel, která vám mohou zbýt.*

**Řešení.** Po několika pokusech (s menší počáteční množinou) jste mohli zjistit, že vůbec nezáleží na tom, jaká čísla vybíráte a nakonec vyjde ta samá hodnota. Pro dokázání této vlastnosti najdeme trochu trikový invariant.

Označme $S_t$ součin dvojnásobků čísel v množině zvýšených o 1 v okamžiku, kdy v množině zbývá $t$ čísel. Formálně tedy

$$S_t = (2m_1 + 1) \cdot (2m_2 + 1) \cdot \dots \cdot (2m_t + 1),$$

kde $\{m_1, m_2, \dots, m_t\}$ je aktuální množina čísel. Dokážeme, že $S_t$ nezávisí na $t$, tedy že nahrazení libovolných dvou čísel $u$, $v$ číslem $2uv + u + v$ tuto hodnotu nezmění. Jelikož platí

$$(2u + 1)(2v + 1) = 4uv + 2u + 2v + 1 = 2(2uv + u + v) + 1,$$

ve výsledném součinu se provedení operace neprojeví. Odtud již plyne, že na konci zbyde vždy stejné číslo, zbývá ho vyjádřit.

Na začátku máme čísla od 1 do 2011, tedy $S_{2011} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 4023 = \frac{4023!}{2011! \cdot 2^{2011}}$. Na konci bude v množině jediné číslo $x$, tedy $2x + 1 = S_1 = S_{2011}$ a odtud

$$x = \frac{S_{2011} - 1}{2} = \frac{4023! - 2011! \cdot 2^{2011}}{2011! \cdot 2^{2012}}.$$

**Úloha 5.4.** *Na (oboustranně) nekonečný pás rozdělený na čtverce je naskládáno konečně mnoho kamenů. V každém kroku provedeme jeden z následujících tahů:*

- *Odebereme jeden kámen z pozice $n - 1$ a $n$ a přidáme jeden kámen na pozici $n + 1$.*
- *Odebereme dva kameny z pozice $n$ a přidáme po jednom kameni na pozice $n - 2$ a $n + 1$.*

*Dokažte, že posloupností těchto tahů se musíme dostat do stavu, kdy ani jeden z těchto tahů nelze provést a rozložení kamenů v tomto stavu nezávisí na operacích, které jsme prováděli (ale pouze na počátečním rozdělení kamenů).*

**Řešení.** Použijme podobnou metodu jako v pomocném povídání v příkladu 5, totiž exponenciální ohodnocení pozic. Pozici $k$ přiřadíme hodnotu $a^k$, kde $a$ je zatím neznámé číslo. Budeme se snažit zajistit, aby celkové ohodnocení $S = \sum a^k \cdot p_k$, kde $p_k$ je počet kamenů na pozici $k$, bylo invariantní.

- Pří aplikaci prvního povoleného tahu odebereme kámen z pozic $n-1$ a $n$, přidáme na $n + 1$. Požadujeme tedy, aby $a^{n-1} \cdot (a^2 - a - 1) = 0$.
- Při použití druhého odebereme dva kameny z $n$ a přidáme na $n-2$, $n+1$. Chceme proto zajistit $a^{n-2} \cdot (a^3 - 2a^2 + 1) = 0$.

Z rozkladu polynomu $a^3 - 2a^2 + 1 = (a-1)(a^2 - a - 1)$ dostáváme, že stačí splnit $a^2 - a - 1 = 0$, takže oba kořeny této rovnice $(1 \pm \sqrt{5})/2$ jsou vyhovující. Ohodnocení chceme mít všude kladné, položme tedy $a = (1 + \sqrt{5})/2$.

Nejprv musíme ukázat, že posloupností tahů se po konečném počtu kroků dostaneme do stavu, kdy ani jeden tah nelze provést, jinými slovy, dané operace nelze provádět do nekonečna. Při první operaci vždy jeden kámen ubyde, takže pokud existuje nekonečná posloupnost tahů, pak od určité doby nepoužívá tahy prvního typu. Stačí proto ukázat, že neexistuje nekonečná posloupnost tahů druhého typu. Pro spor předpokládejme, že existuje. Pak také existuje nekonečná posloupnost tahů, ve které se každý kámen pohne nekonečně mnohokrát, neboť kameny, které se po určitém čase přestanou hýbat, můžeme zanedbat a pokračovat od tohoto času dál. Vždy proto platí, že jednou bude operace provedena na nejpravější obsazenou pozici, čímž se posune pravý „kraj"(tj. index nejpravější obsazená pozice zvýší).

Předpokládejme, že celkové ohodnocení (které je invariantní) je $H$. Potom můžeme najít takové $l$, že $a^l > H$. Jelikož se pravý „kraj" stále posouvá, jednou bude kámen i na pozici $l$. Celkové ohodnocení by pak bylo větší než $H$, což je spor.

Druhou částí úlohy bylo ukázat, že ať děláme, co děláme, konečný stav vždycky vypadá stejně. Pokud ani jeden z tahů nelze provést, nejsou nikde dva kameny na stejné pozici, ani nikde nejsou dva kameny vedle sebe. Ukážeme, že pro dané celkové ohodnocení $H$ lze kameny naskládat na pozice **jediným možným způsobem** při splnění těchto podmínek.

Na pozicích menších než $n$ dostaneme maximální ohodnocení, pokud bude kámen na každém druhém poli. Ohodnocení potom bude

$$a^{n-1} + a^{n-3} + a^{n-5} + \cdots = \frac{a^{n-1}}{1 - a^{-2}} = a.$$

Odtud plyne klíčové pozorování, že s konečným počtem kamenů na pozicích menších než $n$ bude celkové ohodnocení menší, než pro jediný kámen na pozici $n$.

Z toho již dostáváme, že pokud $k$ je nejvyšší exponent, pro který $a^k \leq H$, pak na pozici $k$ musí nutně být kámen. Zbylé kameny umístíme rekurzivně (pokračujeme obdobně s celkovým ohodnocením $H - a^k$). Tímto postupem dostaneme vyhovující rozpoložení kamenů, které je díky vynucenému umístění kamenu v každém kroku jednoznačné.

Na závěr podotkněme, že použité ohodnocení úzce souvisí s Fibonacciho čísly. Pokud bychom ohodnotili pozice Fibonacciho čísly, celkové ohodnocení by se také neměnilo. Jediná překážka je, že to není možné, neboť pás je oboustranně nekonečný. Bylo by tedy potřeba nějakým způsobem zobecnit Fibonacciho čísla, čímž opět dostáváme jakési exponenciální ohodnocení pozic. Jednoznačnost umístění kamenů pak úzce souvisí s jednoznačností zápisu ve *Fibonacciho číselné soustavě*, pokud zakážeme dvě jedničky vedle sebe.

**Úloha 5.5.** *Za to v Lenošíně byl pěkný jarní zmatek. Všichni pobíhali a hledali kousek papíru a tužku. Vyhlásili zde totiž tzv. jarní příklad a kdo ho vyřeší jako první, ten nemusí dělat jarní úklid. A toho, že budou muset uklízet se všichni Lenošínští bojí ze všeho nejvíc. Měli dokázat, že $a^2 - c^2 = ab$, pokud $a, b, c$ jsou reálná nenulová čísla taková, že platí $a^2 - b^2 = bc$ a $b^2 - c^2 = ca$. Také se vám nechce uklízet? Tak to rychle vyřešte jako první!*

**Řešení.** Sečtením známých rovností $a^2 - b^2 = bc$ a $b^2 - c^2 = ca$ dostáváme $a^2 - c^2 = bc + ca$, takže nám stačí dokázát, že $bc + ca = ab$.

Z první známé rovnosti $a^2 - b^2 = bc$ můžeme vyjádřit $c = a^2/b - b$ a tedy $b + c = a^2/b$. Pravá strana této rovnosti je zřejmě nenulová a proto jí můžeme druhou zadanou rovnost vydělit. Dostáváme $b - c = bc/a$ a po úpravě $bc + ca = ab$, čímž je chtěná rovnost dokázána.

**Úloha 5.6.** *Kouma se tiše schovával na zahradě a doufal, že i když jarní příklad nevyřešil jako první (prý ho předběhl nějaký BRKOSák, hrůza), nebude muset uklízet. A aby se nenudil, kreslil si do písku kružnice. Nejprve nakreslil dvě kružnice $k, l$, které měly stejný poloměr a protínaly se v bodech $B$ a $C$. Jako $X$ si označil střed úsečky $BC$. Dále si označil bod $A$, který leží na kružnici $k$ a zároveň vně kružnice $l$. Polopřímky $AB$, $AC$ protínají $l$ v $A_1$, $A_2$ a polopřímky $A_1X$, $A_2X$ protínají $k$ v $P_1$, $P_2$. A pak ho to napadlo. „Už to mám! Dokážu, že $|AP_1| = |AP_2|$." Dokážete to dokázat dřív než lenošný Kouma?*

**Řešení.** Označme $K_1, L_1$ průsečíky polopřímky $A_1P_1$ s $k, l$ (různé od $P_1, A_1$). Jelikož $X$ je středem úsečky $BC$ a kružnice mají stejný poloměr, jsou trojúhelníky $BXK_1$ a $CXL_1$ shodné a obzvláště pak $|BK_1| = |CL_1|$.

Úhly $BA_1K_1, L_1P_1C$ jsou obvodové úhly nad shodnými tětivami $BK_1, CL_1$ kružnic $k, l$ se stejným poloměrem a proto musí být stejně velké. Odtud dostáváme rovnoběžnost přímek $AA_1$ a $CP_1$, ze které plyne $|AP_1| = |BC|$.

Obdobně lze odvodit $|AP_2| = |BC|$, což dohromady dává dokazovanou rovnost $|AP_1| = |BC| = |AP_2|$.

**Úloha 5.7.** *To Ňouma byl daleko poctivější. Pečlivě uklízel každé přebytečné smítko, co mu po zimě zůstalo na stole. A nebyl by to Ňouma, kdyby si ta smítka nespočítal. Bylo jich dohromady $x$. A pak se vrhl na Koumův stůl, protože Kouma kdovíkde vězel a úklid se přeci nesmí zanedbat. Koumův stůl obsahoval $y$ smítek. Ale to je náhoda, že dvojnásobek druhé mocniny počtu Ňoumových smítek bez jednoho se rovnal patnácté mocnině počtu Koumových smítek, že? Dokažte, že měl Ňouma na stole buď 1 smítko, nebo nějaký počet dělitelný pěti.*

**Řešení.** Chceme dokázat, že pokud pro přirozená $x > 1$ a $y$ platí $2x^2 - 1 = y^{15}$, pak nutně 5 dělí $x$. Zkusme to sporem.

Převeďme 1 na druhou stranu a rozložme:

$$\left(\frac{y^5 + 1}{2}\right)(y^{10} - y^5 + 1) = x^2.$$

Označme $a = (y^5 + 1)/2$, $b = y^{10} - y^5 + 1$ činitele na levé straně. Jelikož $y$ je z původní rovnice zřejmě liché, jsou obě čísla přirozená.

Protože $(2a)^2 - b = 3y^5$ a $a$ je s $y^5$ zřejmě nesoudělné, musí být buď $a$ a $b$ nesoudělná, nebo je jejich největší společný dělitel 3. Rozeberme obě možnosti.

1. Pokud jsou nesoudělná, pak z rovnice $ab = x^2$ plyne, že $a$ i $b$ jsou druhé mocniny. To však není možné, neboť pro $y > 1$ platí
$$\left(y^5 - 1\right)^2 < y^{10} - y^5 + 1 < \left(y^5\right)^2 .$$
2. Pokud $(a, b) = 3$, pak z rovnice $ab = x^2$ existují $A$,$B$ takové, že $a = 3A^2$, $b = 3B^2$ a tedy $y^5 + 1 = 6A^2$ a $x = 3AB$.

   Jelikož $y^5 - y = (y^2 + 1)(y - 1)y(y + 1)$ je vždy dělitelné 6 (je dělitelné součinem tří po sobě jdoucích čísel), musí být i $6A^2 - (y^5 - y) = y + 1$ dělitelné 6. Potom
$$\left(\frac{y+1}{6}\right)(y^4 - y^3 + y^2 - y + 1) = A^2.$$
   Jelikož $y^4 - y^3 + y^2 - y + 1 = (y+1)(y^3 - 2y^2 + 3y - 4) + 5$, jediný možný společný dělitel činitelů na levé straně předchozí rovnice proto dělí pětku. Z předpokladu však 5 nedělí $x$ a tedy ani $A$, činitele na levé straně jsou tedy nesoudělné. Výraz $y^4 - y^3 + y^2 - y + 1$ proto musí být čtverec. To však není pro $y > 1$ možné, protože
$$\left(2y^2 - y\right)^2 < 4(y^4 - y^3 + y^2 - y + 1) < \left(2y^2 - y + 1\right)^2 .$$

Ani v jednom případě nemá rovnice pro $x > 1$ nedělitelná pěti řešení, což jsme chtěli dokázat.