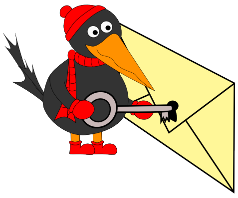
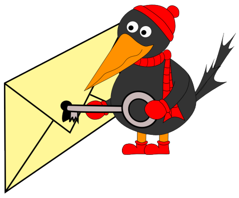


Řešení 4. série

Kruhová inverze



Při řešení každé z prvních čtyř úloh se využije právě jedna kruhová inverze. Pro zkrácení zápisu zavedeme konvenci, že obraz útvaru (bodu, přímky, kružnice) U v této inverzi budeme značit U'.

Úloha 4.1.

Matěj s Liběnkou si venku užívali zimní radovánky a najednou je napadl ten samý nápad. Každý z nich začal vyšlapávat kružnici, protože se ale nedomluvili, tak se jejich kružnice protly ve dvou bodech, označme je A, B. Jelikož se jim obrázek zdál nedokonalý, tak se rozhodli, že každý vyšlape ještě jednu kružnici, tak aby tyto kružnice měly vnější dotyk s již vyšlapanými kružnicemi. Body, ve kterých se druhá Liběnkou vyšlapaná kružnice dotýkala těch prvních dvou označme C, E. Dotyky Matějovy druhé kružnice s původními dvěmi označme D, F. Pomohli byste nyní Matějovi a Liběnce dokázat, že kružnice opsaná trojúhelníku ACE má jediný společný bod s kružnicí opsanou trojúhelníku ADF?

Řešení.

Zvolíme jednotkovou kružnici se středem A a všechny objekty uvedené v zadání podle ní invertujeme. Z původně vyšlapaných kružnic se stanou přímky $E'F'$ a $C'D'$. Z nově vyšlapaných kružnic (označme je k, l) se stanou kružnice k', l', jedna z nich se dotýká přímek v bodech C', E', druhá v bodech D', F'. Kružnice opsané trojúhelníkům ACE a na ADF se zobrazí na přímky $C'E'$ a $D'F'$.

Kružnice k', l' mají společné tečny $E'F'$ a $C'D'$. Průsečík těchto tečen je středem stejnolehlosti, která zobrazí k na l. Spojnici dotykových bodů $C'E'$ tato stejnolehlost zobrazí na spojnici $D'F'$. Protože obraz přímky je rovnoběžný se vzorem, jsou přímky $C'E'$ a $D'F'$ rovnoběžné. Pokud by se kružnice opsané trojúhelníkům ACE a ADF měly společný bod různý od A, obraz tohoto společného bodu by byl průsečíkem přímek $C'E'$ a $D'F'$, což je spor s výše dokázanou rovnoběžností.

Kružnice opsané trojúhelníkům ACE a ADF se proto protínají pouze v bodě A.

Úloha 4.2.

Henry je pozoroval z okna, jak si hrají, ale za chvíli si okno zamlžil a už na ně neviděl. Rozhodl se proto jej očistit, ale nebyl by to Henry, kdyby si to nečistil nějak systematicky. Nejprve si tedy vykreslil do zamlženého okna kružnici l. Poté ***okolo ní*** *nakreslil kružnici k tak, aby měla s kružnicí l jeden společný bod A. Pak se rozhodl vytvořit tečnu ke kružnici l procházející zvoleným bodem B na kružnici l. Tato tečna mu protla kružnici k v bodech E, D. Dále si označil C střed toho oblouku DE kružnice k, který neobsahuje bod A. Pak začal přemýšlet, zda body A, B, C leží na jedné přímce. Než to však stihl dokázat, sklo se odmlžilo.*

Řešení.

Protože je bod C středem oblouku DE, jsou obvodové úhly EAC a CAD oba rovny polovině obvodového úhlu EAD. Abychom dokázali zadané tvrzení, stačí nám dokázat, že i oba úhly EAB a BAD jsou rovny polovině EAD – k tomu stačí ukázat, že jsou shodné.

Celou konstrukci zobrazíme v inverzi, ve které jsou ramena těchto úhlů samodružná. Taková inverze musí mít střed A, za poloměr lze zvolit např. jedničku. Kružnice k a l mají jediný společný bod A, jejich obrazem v této inverzi budou rovnoběžky k', l'. Obrazem tečny t, kterou Henry kreslil na okno, je kružnice t', její střed označme S. Tato kružnice se s přímkou k' protíná v bodech D', E', přímky l' se dotýká v bodě B'. Přímky k' a l' jsou kolmé na SB', jsou proto samodružné v osové souměrnosti podle této přímky. Stejně tak je v ní samodružná kružnice t', čtyřúhelník $SE'D'B'$ je osově souměrný, středové úhly $E'SB'$, $B'SD'$ jsou shodné, obvodové úhly $E'AB'$, $B'AD'$ také. Ty jsou ale po řadě shodné s úhly EAB a BAD, čímž jsme dokázali požadované.

Úloha 4.3.

V zimní čas byla u Matěje a Liběnky na návštěvě babička. Byla zrovna v kuchyni a vykrajovala perníčky, když se otevřely dveře a obě děti vběhly do kuchyně jako velká voda a hned, že chtějí taky vykrajovat. Liběnka začla a vykrojila do těsta kružnici k. Matěj navázal a vyřízl do těsta kružnici l (označme průsečíky těchto dvou kružnic A, C). Matějovi s Liběnkou to pořád nestačilo a ještě vykrojili v obrázku dvě přímky. Jedna byla tečna ke kružnici k a kružnicí l protínala v bodech A a D. Druhá byla tečna ke kružnici l a kružnici k protínala v bodech A a B. Děti hned napadlo, jestli platí $|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |AD|$, ale než to stihli dokázat, už jim brala těsto z pod rukou babička a dávala ho, nechápajíc, co to vytvořili, na plech. Stihnete to dokázat dřív než děti?

Řešení.

Asi nejkratší řešení této úlohy využívá vlastností úsekových úhlů a z nich plynoucí podobnosti trojúhelníků ABC a DAC. My bychom ale rádi předvedli řešení postavené na kruhové inverzi.

Středem kruhové inverze bude stejně jako v minulých úlohách bod A a poloměr můžeme opět zvolit jednotkový. Přímka AD se zobrazí sama na sebe. Kružnice k má s přímkou AD jediný společný bod A, jejím obrazem je proto rovnoběžka s přímkou AD. Stejně tak přímka l' je rovnoběžná s přímkou AD. Čtyřúhelník $AB'C'D'$ je proto rovnoběžníkem a platí $|AB'| = |C'D'|$, po dosazení ze vzorce pro vzdálenost mezi obrazy bodů (viz pomocný text) dostaneme $\frac{1}{|AB|} = \frac{|CD|}{|AC||AD|}$, což po úpravě dává dokazovanou rovnost.

Úloha 4.4.

A to už děti volal Henry do pokoje, ať se jdou podívat na novou hru, kterou jim koupil. Tato hra měla velmi zvláštní herní plán. Vypadalo to jako podivný geometrický obrazec sestrojený ze dvou kružnic k, l protínajících se v bodech A, D. Dále byla na plánku společná tečna těchto kružnic, která byla blíž k bodu A a dotýkala se kružnice k v bodě E a kružnice l v bodě F. Pak tu byla také rovnoběžka s touto tečnou vedená bodem D, která protínala kružnici k v bodě C a kružnici l v bodě B (oba body jsou různé od bodu D). A ještě tu byly dvě kružnice, jedna opsaná trojúhelníku CDF a druhá BDE, které se protínaly v bodě P. Cílem hry bylo projít za určitých pravidel po přímce skrz body D, A a P. Ale leží tyto body vůbec na přímce? Dokažte to.

Řešení.

Aby se nám úloha lépe řešila, všechny zadané útvary invertujeme podle jednotkové kružnice se středem D. Dokazované tvrzení je pak ekvivalentní tomu, že body A', D, P' leží v přímce.

V této inverzi se kružnice k zobrazí na přímku $A'C'$, kružnice l na přímku $A'B'$ a přímka BC na přímku $B'C'$. Společná tečna t kružnic k, l se zobrazí na kružnici t', která se dotýká přímek $A'B'$ a $A'C'$ po řadě v bodech F' a E'. Protože přímka BC je rovnoběžná s t, mají $B'C'$ a t' jediný společný bod, a to D. Kružnice t' je proto vepsanou kružnicí trojúhelníka $A'B'C'$, dotykové body této kružnice jsou D, E', F'. Kružnice opsané trojúhelníkům BDE a CDF se zobrazí na přímky $B'E'$, $C'F'$, bod P' je proto průsečíkem těchto přímek. Chceme ukázat, že P' leží na $A'D'$, tedy že spojnice vrcholů trojúhelníka s dotykovými body vepsané kužnice na protějších stranách se protínají v jednom bodě.

K tomuto důkazu využijeme Cevovu větu. Chceme dokázat, že $\frac{|A'F'||B'D'||C'E'|}{|B'F'||C'D'||A'E'|} = 1$. Z mocnosti bodů A', B', C' k vepsané kružnici máme $|A'E'| = |A'F'|$, $|B'F'| = |B'D'|$ a $|C'D'| = |C'E'|$, po dosazení z těchto rovností vidíme, že je rovnost v Cevově větě splněna. Tyto tři přímky se proto protínají v jednom bodě [1], čímž jsme hotovi.

Úloha 4.5.

Ani Kouma s Ňoumou v tenhle zimní čas nezaháleli a trénovali své matematické mozky. Tentokrát přišel Kouma za Ňoumou se soustavou rovnic

$$x^2 + xy + xz - x = 2$$
$$y^2 + xy + yz - y = 4$$
$$z^2 + xz + yz - z = 6$$

a slíbil mu, že pokud najde všechna řešení této soustavy v oboru reálných čísel, dá mu oříškovou čokoládu. A Ňouma má oříškovou čokoládu zatraceně rád. A co vy? A uměli byste to vyřešit?

Řešení.

Označme $x + y + z = s$. Pak lze soustavu psát ve tvaru

$$xs - x = 2$$
$$ys - y = 4$$
$$zs - z = 6$$

Sečtením rovnic $(x + y + z)s - (x + y + z) = 12$, tedy $s^2 - s = 12$. Řešením této kvadratické rovnice dostáváme $s = 4$ nebo $s = -3$. Soustavu je dále možné upravit do tvaru $x = \frac{2}{s-1}$, $y = \frac{4}{s-1}$, $z = \frac{6}{s-1}$ (pro obě uvažovaná s šlo o korektní úpravu, neboť jsme nedělili nulou). Dosazením za s pak získáme obě řešení soustavy: $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{4}{3}$, $z = 2$ a $x = -\frac{1}{2}$, $y = -1$, $z = -\frac{3}{2}$. Zkouškou ověříme, že obě řešení vyhoví.

[1] Tento bod se v literatuře označuje jako Gregonnův bod trojúhelníka $A'B'C'$

Úloha 4.6.

Za Hloupětínem stojí 20 památných stromů. Hloupětínští radní se je rozhodli zpřístupnit veřejnosti, a tak mezi nimi postavili síť cyklostezek. Cyklostezka vždy začínala i končila u některého ze stromů a nevedla kolem žádného dalšího stromu. Mezi každými dvěma stromy vedla nejvýše jedna cyklostezka. Protože radní nebyli žádní hlupáci, navrhli cyklostezky chytře. Aby se cyklisté nesráželi, nechali radní vybudovat mimoúrovňová křížení všude tam, kde se cyklostezky křížily (možnost dostat se z jedné cyklostezky na druhou tak byla pouze u stromů). A aby cyklisté nebloudili v kruzích, zavedli radní na cyklostezkách přikázaný směr jízdy tak, že se jezdec nikdy nemohl vrátit ke stromu, u kterého už byl.

Nejpamátnější z památných stromů se nazývaly Dutoň a Křivoň. Mohli radní navrhnout stezky tak, aby se cyklista dodržující přikázaný směr jízdy mohl po cyklostezkách dostat od Dutoně ke Křivoni ***právě*** *2011 různými cestami?*

Plný počet bodů dostanete, pokud správně a úplně zdůvodníte, zda se jim to mohlo povést. Bonusový půlbod nemine ty, kteří navíc zjistí, pro jaká n by to bylo možné, kdyby stromu nebylo 20 ale n a ostatní podmínky zůstaly splněny.

Řešení.

Pusťme se rovnou do řešení složitější části úlohy, a to hledání minimálního počtu stromů. Nejprve si musíme uvědomit, že pokud dvě cesty prochází přes stejnou množinu stromů, pak jsou stejné. Kdyby tomu tak nebylo, existovaly by stromy t_1, t_2 takové, že v jedné cestě je strom t_1 před t_2 a ve druhé naopak – pak by se ale od stromu t_1 dalo dojet přes t_2 zpátky k němu, což je v zadání zakázáno. Cest je proto nejvýše tolik, kolik je množin stromů, přes které cesta vede. Takových množin je nejvýše 2^{n-2}, neboť Dutoň a Křivoň v množině být musí a ze zbylých $n-2$ prvků lze vytvořit 2^{n-2} podmnožin. Musí proto platit $2^{n-2} \geq 2011$, takže $n \geq 13$.

Nyní ukážeme, že nám 13 stromů stačí. Očíslujeme je od 1 do 13 tak, že Dutoň je 1 a Křivoň 13. Nyní postavíme cyklostezky mezi každými dvěma stromy tak, aby stezka vedla od nižšího čísla k vyššímu. Zřejmě jsme neporušili podmínku, že se cyklista nemůže vrátit do výchozího bodu, protože víme, že číslo stromu, u kterého se právě nachází, po celou dobu cesty roste. Navíc pro jakoukoliv (tedy i prázdnou) podmnožinu P množiny $\{2,\dots,12\}$ platí, že cyklista může od Dutoně ke Křivoni dojet právě přes prvky této množiny. Možných cest od Dutoně ke křivoni je tak $2^{11} = 2048$. Nyní chceme ukázat, že jich umíme 37 zrušit. Co se stane, když zrušíme stezku od stromu i ke stromu 13? Zaniknou všechny cesty, které vedly od 1 přes nějakou podmnožinu $\{2,\dots,i-1\}$ do i a následně do 13. Takových je 2^{i-1}. Zrušením této stezky klesne počet cest o 2^{i-1}. Když tuto operaci provedeme postupně pro $i = 1, 3, 6$, snížíme počet cest o $1+4+32 = 37$ (žádnou ze zrušených cest nezapočítáváme dvaskrát, neboť odstraňujeme vždy jen poslední stezku, kterou dříve odstraněné cesty nevyužívaly), což jsme chtěli.

Počet 2011 cest je proto dosažitelný pro 13 a více stromů.

Úloha 4.7.

O Vánocích byly v Hloupětíně trhy a na náměstí stálo n stánků očíslovaných čísly 1 až n se všemi možnými cukrlátky, medovinkami, klobáskami, zimními čepičkami, brašnami, náušnicemi a se spoustou dalších věcí. Protože jsou hloupětínští trošku hloupí a neuměli by mezi těmito stánky projít tak, aby prošli všechny stánky a přitom žádný dvakrát, rozhodli se radní, že nařídí přesné pořadí, podle kterého se musí tyto stánky projít. Na náměstí se sešlo n lidí, že si chtějí něco na stáncích koupit. Rozejdou se nyní v pořadí od prvního k poslednímu podél stánků.

Každý hloupětínský má rád jeden z těchto n obchůdků a chystá se v něm nakoupit něco na Vánoce. Jestliže v „jeho“ stánku ještě nikdo nenakoupil, tak nakoupí, je spokojený a odchází domů. Pokud už v jeho oblíbeném obchůdku někdo před ním nakoupil, jde k nejbližšímu dalšímu stánku, kde ještě nikdo nenakupoval a věc, co tento stánek prodává, si zakoupí. Pokud už na žádný takový stánek nenarazí, uraženě odchází a už se nevrátí. Číslo oblíbeného obchodu i-tého hloupětínského občana označme a_i. Kolik existuje n-tic $(a_1, \ldots, a_n)$ takových, že každý hloupětínský si něco nakoupí?

Řešení.

Důkaz, který zde uvedeme, je sice trikový, ale velmi pěkný. Poprvé byl publikován H. O. Pollakem v roce 1974.

Ke stánkům přidáme stánek $n + 1$ a dovolíme lidem, aby i tento stánek byl jejich oblíbeným. Navíc dovolíme těm, kteří si nezvládnou nakoupit během jednoho průchodu náměstím, aby se od stánku $n + 1$ vrátili k prvnímu a pokračovali v cestě. Takto si jistě nakoupí všichni. Snadno nahlédneme, že pokud v tomto novém uspořádání někdo nakupoval u stánku $n+1$, pak by si ve starém nenakoupil vůbec a naopak první z těch, kteří by si ve starém systému nic nenakoupil, si nyní nakoupí u stánku $n+1$. Hledaným výsledkem je proto počet n-tic čísel od 1 do $n + 1$ takových, že nikdo nebude v novém systému nakupovat u stánku $n + 1$. Pro každou n tici existuje právě jeden stánek, u kterého nikdo nenakoupil. Protože je úloha souměrná, zvětšením všech čísel v n-tici o 1 (n se nahradí jedničkou) se volný stánek o jednu pozici posune. Můžeme n-tice rozdělit do tříd tak, že v každé třídě se n-tice liší jen přičtením konstanty ke všem složkám. V každé takové třídě je právě jedna n-tice, pro niž je volný stánek $n+1$. Počet všech možných n-tic je $(n + 1)^n$, v jedné třídě je jich vždy $n + 1$. Počet tříd (a tedy i počet vyhovujících n-tic) je proto $(n + 1)^{n-1}$.

Ty z vás, kteří se trochu vyznají v grafech a někdy slyšeli o Cayleyho formuli, jistě překvapí, že je počet vyhovujících sekvencí roven počtu stromů na $n + 1$ označených vrcholech.

BRKOS Team 2011