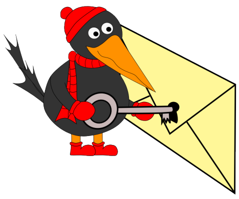
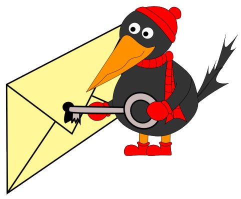


Řešení 3. série

Goniometrie



Úloha 3.1.

To se jednou Liběnka probudila a venku krásně padal sníh. Vločky jí připomněly její nejkrásnější den v životě. Stejně jako nyní i tehdy se dívala z okna na padající sníh, když v tom zazvonil zvonek. Otevřela a strnula. Ve dveřích stál ten, na kterého velmi často myslívá. V levé ruce držel květinu a v pravé lístek, na kterém byl v TEXu vysázen matematický příklad. „Květina, TEX a matematika, ideální kombinace,“ pomyslela si a nečekanou návštěvu pozvala dál. Květinu dala do vázy, lístek položila na stůl. Zvědavost jí však nedala, a tak si příklad rychle přečetla.

Pro trojúhelník ABC platí vztah $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$ a úhel při vrcholu C je roven $60°$. Najdi hodnoty zbývajících dvou úhlů.

Ale to už Liběnka spěchala za svým ctitelem. Odpoledne příjemně plynulo. Až najednou jako by nebylo o čem povídat. Oba tiše sedí a navzájem se dívají do očí. Po chvíli jim však sklouzne pohled na rty. Liběnka přivírá oči, on také a pak... Pak pomaloučku, jako by se báli, že něco pokazí, se přibližují. Už jen kousek. Už jen pár milimetrů. Když v tom se Liběnka trochu odkloní a zašeptá: „Ty úhly jsou...“.

A měla pravdu. Zkuste je najít také.

Řešení.

Nejprve si ukážeme, čemu se rovná $\frac{a-b}{a+b}$:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\sin(\alpha) - \sin(\beta)}{\sin(\alpha) + \sin(\beta)} == \frac{\sin(\frac{\alpha-\beta}{2})\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})}{\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Z toho plyne, že

$$\frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Do této rovnosti dosadíme zadané hodnoty $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$ a $\gamma = 60°$:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+3} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Po vynásobení obou stran rovnice zjistíme, že

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = 1$$

a tedy $\alpha - \beta = 90°$. Jelikož $\alpha + \beta = 180° - \gamma$, je zřejmé, že $\alpha = 105°$ a $\beta = 15°$.

Úloha 3.2.

Matěj se mezitím nudil ve vedlejším pokoji, usrkával čaj a se zájmem sledoval vločky, které padaly jedna za druhou a každá měla jiný tvar a jinou velikost. Jedna byla obzvlášť velká a Matěj *si všiml, že není čistě bílá, ale že je na ní cosi napsaného. A jelikož je nesmírně zvědavý, hbitě otevřel okno a už ji držel v ruce. Na vločce stálo: „Je dána funkční hodnota* $\operatorname{tg} x = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$*, kde* $a \neq \pm b$*. Určete funkční hodnotu* $|\sin x|$*." Ani ho nenapadlo zkoumat, odkud se bere a proč mu na ruce netaje, a rychle se jal řešit úlohu. Stihnete to vyřešit dřív než Matěj?*

Řešení.

Řešení se ubírá následujícími kroky:

$$\begin{aligned}
\operatorname{cotg} x &= \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2} \\
1 + \operatorname{cotg}^2 x &= \frac{1}{\sin^2 x} \\
1 + \frac{(a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} &= \frac{1}{\sin^2 x} \\
\frac{(a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^2}{(a^2+b^2)^2} &= \frac{1}{\sin^2 x} \\
\sin^2 x &= \frac{(a^2+b^2)^2}{(a^2+b^2)^2 + (a^2-b^2)^2} \\
\sin^2 x &= \frac{(a^2+b^2)^2}{a^4+2a^2b^2+b^4+a^4-2a^2b^2+b^4} \\
\sin^2 x &= \frac{(a^2+b^2)^2}{2(a^4+b^4)} \\
|\sin x| &= \frac{a^2+b^2}{\sqrt{2(a^4+b^4)}}
\end{aligned}$$

Úloha 3.3.

Nahoře nad Matějem seděl v okně Henry a přemýšlel, zda má poslat ještě jednu vločku s dalším příkladem, aby se Matěj nenudil. Když ale viděl, jak ho úloha zaujala, další už neposílal, neboť by si jí teď Matěj stejně nevšiml. A tak se tedy rozhodl, že ji vyřeší sám. Vzal si papír a tužku a už si sepisoval rovnici

$$(1+\operatorname{tg} 1^\circ)(1+\operatorname{tg} 2^\circ)\cdots(1+\operatorname{tg} 45^\circ) = 2^n.$$

A co s ní? No přeci určit, pro jaké n *platí. Zvládnete to?*

Řešení.

Označme

$$1+\operatorname{tg} k^\circ = 1 + \frac{\sin k^\circ}{\cos k^\circ} = \frac{\cos k^\circ + \sin k^\circ}{\cos k^\circ} = \frac{\sqrt{2}\sin(45^\circ + k^\circ)}{\cos k^\circ} = \frac{\sqrt{2}\cos(45^\circ - k^\circ)}{\cos k^\circ}.$$

Dále platí

$$(1+\operatorname{tg} k^\circ)(1+\operatorname{tg}(45^\circ - k^\circ)) = \frac{\sqrt{2}\cos(45^\circ - k^\circ)}{\cos k^\circ} \cdot \frac{\sqrt{2}\cos k^\circ}{\cos(45^\circ - k^\circ)} = 2.$$

Odtud plyne $(1+\operatorname{tg} 1^\circ)(1+\operatorname{tg} 2^\circ)\cdots(1+\operatorname{tg} 45^\circ) = (1+\operatorname{tg} 1^\circ)(1+\operatorname{tg} 44^\circ)(1+\operatorname{tg} 2^\circ)(1+\operatorname{tg} 43^\circ)\cdots(1+\operatorname{tg} 22^\circ)(1+\operatorname{tg} 23^\circ)(1+\operatorname{tg} 45^\circ) = 2^{23}$.

Zadání je tedy splněno pro $n = 23$.

BRKOS Team 2011

Úloha 3.4.

Když přestala Liběnka vzpomínat na to nádherné odpoledne, šla si udělat teplý čaj na zahřátí. Cestou si všimla Matěje, který byl vedle v pokoji zrovna zahloubán do nějakého příkladu a před sebou měl položenou jakousi vločku. Ta Liběnku velmi zaujala, a tak si ji chtěla prohlédnout. Vzala ji do ruky a otočila ji. No podívejme, i na druhé straně je příklad: Řešte v $\mathbb{R}$ *goniometrickou rovnici*

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

Hned se jí zatetelilo srdíčko. Rychle, ať to mám vyřešené dřív než Matěj.

Řešení.

Pro výpočet použijeme vztah

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Postupně provádíme následující úpravy:

$$\begin{aligned}
2 \sin \frac{x+3x}{2} \cos \frac{x-3x}{2} + \sin 2x &= 1 + \cos x + \cos 2x \\
2 \sin 2x \cos(-x) + \sin 2x &= 1 + \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \\
2 \cdot 2 \sin x \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - 2\cos^2 x - \cos x &= 0 \\
\cos x (4 \sin x \cos x + 2 \sin x - 2 \cos x - 1) &= 0 \\
\cos x [2 \sin x (2 \cos x + 1) - (2 \cos x + 1)] &= 0 \\
\cos x [(2 \cos x + 1)(2 \sin x - 1)] &= 0
\end{aligned}$$

Proto musí nastat jedna z následujících možností:

$$\begin{aligned}
\cos x = 0 &\Rightarrow x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \\
\cos x = -\frac{1}{2} &\Rightarrow x_{2,3} = \left\{ \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right\} \\
\sin x = \frac{1}{2} &\Rightarrow x_{4,5} = \left\{ \frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \right\}
\end{aligned}$$

Množinou řešení tak je

$$K = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{ \frac{1}{6}\pi + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, \frac{4}{3}\pi + 2k\pi \right\}.$$

Úloha 3.5.

Protože bylo krásně bílo, rozhodli se Kouma s Ňoumou, že půjdou na velkou koulovačku. Nejdřív ze všeho si museli vyrobit spoustu koulí, aby mohla bitva začít. Na Koumově hromádce leželo x koulí, na Ňoumově p koulí. Když vtom Kouma navrhl: „Ňoumo, pojďme si zahrát imaginární koulovačku. Dám ti příklad, když ho zvládneš, vyhraješ. Když se ti to však nepodaří, vyhraju já.“ „Dobře, souhlas,“ líbí se nápad Ňoumovi. „Tak dokaž, že rovnice, kde na levé straně je ciferný součet čísla, které vznikne sečtením počtu tvých a mých koulí, a na pravé straně je ciferný součet počtu mých koulí, má alespoň jedno řešení, právě když počet tvých koulí je dělitelný devíti.“ Pomozte Ňoumovi dokázat příklad.

Řešení.

Nejprve předpokládejme, že pro přirozené číslo p existuje přirozené číslo x tak, že $S(x+p) = S(x)$, kde $S(x)$ značí ciferný součet čísla x. Jelikož čísla n a $S(n)$ dávají stejný zbytek při dělení devíti (platí pro každé přirozené číslo n), dávají stejný zbytek při dělení devíti i čísla $x+p$ a x, jejich rozdíl p je tedy dělitelný devíti. Nechť je obráceně číslo p dělitelné devíti, tj. $p = 9k$ (k je přirozené číslo). Pak je číslo k řešením rovnice $S(x+p) = S(x)$, neboť čísla k a $k+p = 10k$ mají stejný ciferný součet.

Úloha 3.6.

Po tak nádherné a vysilující koulovačce se Kouma s Ňoumou spokojeně vraceli zpět domů. Ale Ňouma byl stále nesvůj, chtěl se nějak Koumovi odvděčit za tak pěkný nápad v koulovačce, a tak stále přemýšlel, co by na něj vymyslel. Pak ho to napadlo. „Koumo, taky pro tebe mám úlohu! Sice nebude tak pěkně s koulema, ale uvidíš, že se ti bude líbit.“ „Tak sem s ní,“ zaradoval se Kouma, že si také trošku procvičí mozek. „Tady máš soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} 9x + y + z &= 83 \\ x + 9y + z &= 99 \\ x + y + 9z &= 69, \end{aligned}$$

která má při změně jednoho čísla na pravé straně na jiné dvojciferné číslo celočíselné řešení. Najdi toto číslo a příslušné řešení soustavy.“ Tentokráte zase potřebuje Kouma vaši pomoc...

Řešení.

Jsou-li čísla x, y, z řešením dané soustavy, je $8(y-x) = 16$, $8(y-z) = 30$ a $8(x-z) = 14$. Poslední dvě rovnice, které jsme dostali odečtením třetí rovnice od prvních dvou rovnic soustavy, ukazují, že x, y, z nemohou být celá čísla. Jelikož máme změnit pravou stranu jen jedné z daných rovnic, musí to být rovnice třetí. Číslo 69 nahradíme zatím neznámým číslem a. Z prvních dvou rovnic plyne $y = x + 2$, dosazením do první a třetí rovnice dostaneme $10x + z = 81$, $2x + 9z = a - 2$, odkud $88x = 731 - a = 88 \cdot 7 + 115 - a$. Má-li být x celé číslo, musí být číslo $115 - a$ dělitelné číslem 88. Jelikož má být číslo a dvojciferné, musí být $a = 27$. Řešením příslušné soustavy je tedy $x = 8$, $y = 10$ a z je rovněž celočíselné, $z = 1$.

Úloha 3.7.

Věděli jste, že lenošínské náměstí je konvexní čtyřúhelník (PUSO), kde v každém rohu je jedna důležitá budova? A dokonce zde platí spousta různých vlastností. Vzdálenost pošty(P) od úřadu(U) je stejná jako součet vzdáleností od pošty k obchodu(O) a od úřadu ke škole(S). Někde na náměstí mají Lenošínští kašnu a pro tu zase platí, že vzdálenost kašny od pošty je stejná *jako součet vzdáleností od pošty k obchodu a od kašny k přímce, kterou tvoří škola společně s obchodem (vzdálenost od kašny k dané přímce si označme h). Dále ještě platí, že vzdálenost od kašny k úřadu je stejná jako součet vzdáleností od úřadu ke škole a vzdálenosti h. Dokažte, že*

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \geq \frac{1}{\sqrt{|PO|}} + \frac{1}{\sqrt{|US|}}.$$

Řešení.

Uvažujme čtyřúhelník $PUSO$ s požadovanými vlastnostmi pro různé hodnoty h. Označme $|PO| = R$, $|US| = r$. Nyní zkonstruujme trojúhelník PUK se stranami $R+r$, $R+h$, $r+h$, kde K označuje kašnu lenošínského náměstí. Dále zkonstruujme kružnice $k_1 = (P, R)$, $k_2 = (U, r)$ a $k_3 = (K, h)$. Body O a S leží po řadě na kružnicích k_1,k_2 a SO je tečnou kružnice k_3. Z toho plyne, že h nabývá maximální hodnoty tehdy, když SO je společnou tečnou kružnic k_1, k_2. Ukažme tedy, že v tomto případě platí

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{|PO|}} + \frac{1}{\sqrt{|US|}},$$

z čehož okamžitě plyne dokazovaná nerovnost, neboť při zmenšování vzdálenosti h se hodnota $\frac{1}{\sqrt{h}}$ zvětšuje a velikosti stran $|PO|$, $|US|$ zůstávají neměnné (tedy i hodnota celé pravé strany nerovnice). Tento fakt platí nezávisle na tom, jak dlouhé strany čtyřúhelníku $PUSO$ zvolíme.

Označme M patu kolmice spuštěné z bodu K na přímku SO a N patu kolmice spuštěné z bodu U na přímku PO. Z pravoúhlého trojúhelníka PUN dostaneme:

$$|SO| = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr}.$$

Velikost SO dále můžeme vyjádřit jako velikost úsečky procházející bodem K, jež je s SO rovnoběžná. Platí tedy

$$|SO| = |SM| + |MO| = \sqrt{(r+h)^2 - (r-h)^2} + \sqrt{(R+h)^2 - (R-h)^2} = 2\sqrt{rh} + 2\sqrt{Rh}.$$

Odtud dostáváme $\sqrt{Rr} = \sqrt{Rh} + \sqrt{rh}$ a po vydělení odmocninou $\sqrt{Rrh}$ získáme požadovaný vztah

$$\frac{1}{\sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{R}}.$$