Řešení 2. série

NÁHODNÉ PROCHÁZKY

Úloha 2.1.

Henry při své noční pochůzce Hloupětínem narazil na opilce. Ten každou vteřinu udělá s pravděpodobností $\frac{4}{9}$ krok dopředu, s pravděpodobností $\frac{4}{9}$ zůstane stát na místě a s pravděpodobností $\frac{1}{9}$ udělá krok dozadu. Jaká je pravděpodobnost, že po t vteřinách ujde k kroků dopředu od místa, kde ho Henry začal pozorovat?

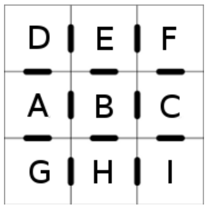
Řešení.

Všimněme si, že pokud by opilec dělal každou půlvteřinu půlkrok dopředu s pravděpodobností $\frac{2}{3}$ a půlkrok dozadu s pravděpodobností $\frac{1}{3}$, bude pravděpodobnost, že se za vteřinu pohne o krok dopředu rovna $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$, pravděpodobnost, že se pohne o krok dozadu $(\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}$ a pravděpodobnost, že zůstane stát na místě zbylé $\frac{4}{9}$. Pohyb opilce nyní budeme popisovat pomocí těchto polovičních kroků. Vzhledem k nim se ptáme, jaká je pravděpodobnost, že po $2t$ krocích urazí opilec vzdálenost $2k$. To spočítáme dosazením do vzorce:

$$\binom{t-k}{2t}\left(\frac{2}{3}\right)^{t+k}\left(\frac{1}{3}\right)^{t-k}.$$

Úloha 2.2.

Kouma se ocitl v bludišti zobrazeném na obrázku. Bludiště se skládá z devíti místností, každé dvě, které sousedí stěnou jsou propojeny dveřmi. Kouma začíná v místnosti A, snaží se dostat do místnosti C. Všechny dveře se dají otevřít z obou stran, akorát dveře do místnosti B jsou pouze jednosměrné. Protože je zmatený, vybírá si náhodně dveře, které otevře. Jaká je pravděpodobnost, že z místnosti A dojde do místnosti C, aniž by uváznul v místnosti B?



Řešení.

Zbylé místnosti označíme D, E, F, G, H, I, viz upravený obrázek u zadání. Pravděpodobnost, že se z místnosti X dostane úspěšně do C, označme p_X. Máme $p_C = 1$, $p_B = 0$. Ze symetrie vidíme, že $p_D = p_G$, $p_E = p_H$ a $p_F = p_I$. Z místnosti A se může s třetinovou pravděpodobností přesunout do libovolné z místností D, B, G. Z těchto místností jsou pravděpodobnosti dosažení C po řadě p_D, p_B, p_G. Proto

$$p_A = \frac{1}{3}p_D + \frac{1}{3}p_B + \frac{1}{3}p_G = \frac{2}{3}p_D.$$

Analogicky odvodíme vztah $p_D = \frac{1}{2}p_E + \frac{1}{2}p_A = \frac{1}{2}p_E + \frac{1}{3}p_D$, $p_E = \frac{1}{3}p_D + \frac{1}{3}p_B + \frac{1}{3}p_F = \frac{1}{3}p_D + \frac{1}{3}p_F$ a konečně $p_F = \frac{1}{2}p_E + \frac{1}{2}p_C = \frac{1}{2}p_E + \frac{1}{2}$. Z prvního z nich máme $p_D = \frac{3}{4}p_E$, z druhého pak $p_F = \frac{9}{4}p_E$, ze třetího $\frac{7}{4}p_E = \frac{1}{2}$. Máme pak $p_E = \frac{2}{7}$, $p_D = \frac{3}{14}$, $p_A = \frac{1}{7}$.

Hledaná pravděpodobnost je pak $p_A = \frac{1}{7}$.

Úloha 2.3.

Kouma se dostal z bludiště a vyšplhal na mlžnou pláň. Mlha na ní byla tak hustá, že přes ni nebylo vidět ani slyšet a snadno se v ní zabloudilo. Navíc byla nekonečná na všechny strany. Ňouma na Koumu čekal v mlze přesně z sáhů západně a s sáhů severně. Oba si vyšli naproti, a to tak, že Kouma šel s pravděpodobností 0,3 na západ, s pravděpodobností 0,3 na sever, s pravděpodobností 0,2 na jih a s pravděpodobností 0,2 na východ. Oba dělali vždy přesně sáhové kroky. Ňouma měl pravděpodobnosti svých kroků stejné, akorát na opačné strany. Jaká je pravděpodobnost, že oba byli po k krocích na stejném místě?

Řešení.

K řešení úlohy je potřeba udělat dva triky. První je popsaný v pomocném textu – rozložíme pohyb na směr severozápad-jihovýchod a směr jihozápad-severovýchod. Důležité je si uvědomit, že pravděpodobnosti pohybu Koumy jsou voleny tak, aby tyto pohyby zůstaly nezávislé – v prvním směru je pravděpodobnost pohybu na severozápad $0,6$, ve druhém směru jsou obě pravděpodobnosti $0,5$. Pravděpodobnost, že se sejdou, je pak součinem pravděpodobností shody jedné z takto pootočených souřadnic.

Druhým trikem je, že si nebudeme všímat pozic kluků, ale polohy Koumy vzhledem k Ňoumovi. Každý krok Ňoumy nahradíme Koumovým krokem v opačném směru. Pravděpodobnost, že se chlapci sejdou je stejná jako šance, že Kouma po $2k$ krocích ujde s sáhů severně a z sáhů západně. Vzhledem k otočeným souřadnicím řekněme, že Kouma udělal a kroků severozápadně a b kroků jihozápadně. Pak musí platit $a = s + z$, $b = z - s$. Pravděpodobnost, že Kouma s Ňoumou budou na stejné pozici ve směru severozápad-jihovýchod je $\binom{2k}{\frac{2k-s-z}{2}} \cdot 0,6^{\frac{2k+s+z}{2}} \cdot 0,4^{\frac{2k-s-z}{2}}$ (prosté dosazení do vzorce z pomocného textu), pro druhý směr je tato pravděpodobnost $\binom{2k}{\frac{2k+s-z}{2}} 0,5^{2k}$. Hledaným výsledkem je součin těchto pravděpodobností. Poznamenejme ještě, že zlomek v kombinačním čísle odpovídá faktu, že pokud by byli severně vzdáleni o sudý a západně o lichý počet sáhů, nikdy se nesetkají. To lze snadno ukázat šachovnicovým obarvením roviny.

Úloha 2.4.

Před hloupětínským kinem stojí 15 boháčů a 25 žebráků a všichni chtějí zhlédnout film, na který je vstupné padesát korun. Každý boháč má u sebe právě jednu stokorunu, každý žebrák právě jednu padesátikorunu (jiné mince ani bankovky nemají). Kino právě otvírá, pokladní má prázdnou kasu. Jaká je pravděpodobnost, že když se boháči a žebráci seřadí ve frontě náhodně, bude mít paní pokladní vždy na vrácení a všichni zvládnou zaplatit za film?

Řešení.

Označme $p(z, b)$ pravděpodobnost, že se všichni dostanou do kina, je-li ve frontě z žebráků a b boháčů. Když si rozmyslíme, jak nejvýše třem žebrákům můžeme přidat jednoho až tři boháče, dojdeme k rovnostem $p(1, 1) = 1/2$, $p(2, 1) = 2/3$, $p(2, 2) = 2/6 = 1/3$, $p(3, 1) = 3/4$, $p(3, 2) = 5/10 = 1/2$, $p(3, 3) = 5/20 = 1/4$. Toto pozorování nás povede k hypotéze, že pro $z + b \geq 2$ a pro $b \leq z$ je $p(z, b) = \frac{z+1-b}{z+1}$ a pro $b > z$ je $p(z, b) = 0$. Toto budeme nyní dokazovat indukcí vzhledem k $z + b$. První krok pro $z+b = 3$ máme, pojďme na krok indukční: předpokládejme platnost tvrzení pro $z+b = s$ a dokažme ji pro $z + b = s + 1$.

Zabývejme se pouze případy, kdy $b \leq z$ (v ostatních je pravděpodobnost $p(z,b)$ zřejmě nulová). S pravděpodobností $\frac{z}{z+b}$ stojí na konci žebrák, ti před ním se do kina dostali s pravděpodobností $p(z-1,b)$. S pravděpodobností $\frac{b}{z+b}$ stojí na konci boháč a ti před ním se do kina dostali s pravděpodobností $p(z,b-1)$. Z předpokladu $b \leq z$ plyne, že za $p(b-1,z)$ i $p(b,z-1)$ lze dosadit po řadě $\frac{z-b}{z}$ a $\frac{z-b+2}{z+1}$.

Po dosazení máme

$$\begin{aligned} p(z,b) &= \frac{z}{z+b}\frac{z-b}{z} + \frac{b}{z+b}\frac{z-b+2}{z+1} = \\ &= \frac{z-b}{z+b} + \frac{bz-b^2+2b}{(z+b)(z+1)} = \frac{z^2-bz+z-b+bz-b^2+2b}{(z+b)(z+1)} = \\ &= \frac{z^2+z-b^2+b}{(z+b)(z+1)} = \frac{(z+b)(z-b+1)}{(z+b)(z+1)} = \frac{z-b+1}{z+1} \end{aligned}$$

Tím je důkaz indukcí hotov. Nyní stačí za b a z dosadit. Hloupětínští mají šanci dostat se do kina $\frac{11}{26}$.

Druhý způsob, jak k úloze přistupovat, je uvážit procházku ve čtvercové síti, při které děláme kroky doprava nahoru s každým žebrákem a doprava dolů s každým boháčem. Z bodu $[0,0]$ chceme dojít do $[z+b, z-b]$ a nikdy přitom neklesnout pod přímku $y=0$. Pokud bychom ignorovali poslední podmínku, bylo by cest $\binom{z+b}{z}$ (některých z kroků z celkových $z+b$ musí být doprava nahoru). Spočítejme nyní nevyhovující cesty, tedy ty, které mají bod na přímce $y=-1$. Část cesty před dosažením tohoto bodu osově zobrazíme podle této přímky. Dostaneme tak cestu z $[0,-2]$ do $[z+b, z-b]$. Takových je $\binom{z+b}{z+1}$ a každá odpovídá jednoznačně jedné nevyhovující cestě. Pravděpodobnost nevyhovující cesty je pak

$$\frac{\binom{z+b}{z+1}}{\binom{z+b}{z}} = \frac{\frac{(z+b)!}{(z+1)!(b-1)!}}{\frac{(z+b)!}{z!b!}} = \frac{b}{z+1},$$

pravděpodobnost vyhovující cesty $1-\frac{b}{z+1} = \frac{z+1-b}{z+1}$.

Tato úloha úzce souvisí s větou, která se anglicky nazývá Bertrand's Ballot Theorem a je motivována úlohou, v níž se počítá pravděpodobnost, že v každém okamžiku voleb měl vítěz více aktuálně odevzdaných hlasů. Její důkazy a zobecnění můžete najít na internetu.

Úloha 2.5.

Kouma si narýsoval trojúhelník a rozhodl se, že jej rozdělí dvěma přímkama na několik částí tak, aby každá byla souměrná podle nějaké osy. Jak to má udělat, aby se mu to povedlo pro obecný trojúhelník?

Řešení.

Nejdříve to zkusme pro pravoúhlý trojúhelník. Všimneme si, že tam nám stačí jedna přímka – spojnice vrcholu s pravým úhlem a středu protější strany. Protože je tento střed současně středem kružnice trojúhelníku opsané, rozděluje zmíněná úsečka pravoúhlý trojúhelník na dva rovnoramenné trojúhelníky s délkou ramene r, kde r je poloměr kružnice opsané.

Tohoto pozorování využijeme v obecném trojúhelníku. Víme, že každý trojúhelník alespoň jedna výška (buď všechny tři, nebo ta proti nejdelší straně) dělí na dva pravoúhlé trojúhelníky. Když v každém z nich spojíme vrchol s pravým úhlem se středem protější strany, rozpadne se nám původní trojúhelník na tři části. Dvě z nich jsou rovnoramenné trojúhelníky (jak jsme ukázali výše), třetí je čtyřúhelník vzniklý spojením dvou rovnoramenných trojúhelníků se společnou základnou. Takovému čtyřúhelníku se říká deltoid a má osu symetrie, která je osou symetrie obou rovnoramenných trojúhelníků. Pokud Kouma použije k dělení trojúhelníku dvě zmíněné spojnice, dostane tři osově souměrné části.

Úloha 2.6.

Kouma si vybral přirozené číslo n a prohlásil, že z každé množiny velikosti $2 \cdot 3^n - 1$ umí vybrat 3^n čísel tak, že je jejich součet dělitelný 3^n.. Ňouma ho chtěl trumfnout a řekl, že takových 3^n čísel zvládne vybrat z jakýchkoliv $2 \cdot 3^n - 2$ čísel. Kdo z nich měl pravdu a proč?

Řešení.

Protože je v zadání n, mohla by k řešení vést indukce. A vskutku! V prvním kroku musíme ukázat, že z pěti čísel lze vybrat tři, jejichž součet je dělitelný třemi. Pokud by tři z těchto pěti čísel dávala stejný zbytek po dělení třemi, součet vybraných tří by byl dělitelný třemi. Pokud by taková tři čísla neexistovala, musí být každý zbytek zastoupený alespoň jednou. Součet tří čísel, která dávají různé zbytky po dělení třemi, je ale dělitelný třemi. V obou případech pro $n = 1$ tvrzení platí.

Přistupme nyní k indukčnímu kroku. Předpokládáme, že tvrzení platí pro $n = k$ a chceme jej dokázat pro $n = k + 1$. Máme množinu $2 \cdot 3^{k+1} - 1$ čísel, což je jistě více ne? $2 \cdot 3^k - 1$, takže z nich dle indukčního předpokladu můžeme vybrat 3^k takových, že je jejich součet dělitelný 3^k. Zbude nám $2 \cdot 3^{k+1} - 1 - 3^k = 5 \cdot 3^k - 1$ čísel, z nichž opět můžeme odebrat 3^k čísel v součtu dělitelných 3^k. Poté můžeme tento krok ještě třikrát opakovat. Získáme tak pět podmnožin původní množiny, z nichž každá má velikost 3^k a součet dělitelný 3^k. Uvažme nyní tyto součty vydělené 3^k. Máme tak pět čísel, z nichž, jak jsme ukázali v prvním kroku, umíme vybrat tři tak, že jejich součet je dělitelný třemi. Součet čísel v jim odpovídajících skupinách bude proto dělitelný $3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$, sjednocení těchto skupin má $3 \cdot 3^k = 3^{k+1}$ prvků. Podařilo se nám tak najít vyhovující podmnožinu pro $n = k + 1$ a tím dokončit důkaz.

Ještě poznamenejme, že obecně lze z $2t-1$ čísel vybrat t tak, aby součet byl dělitelný t. Důkaz má dva kroky: v prvním ukážeme, že to platí pro prvočísla, ve druhém, že když to platí pro a a b, platí to i pro $a \cdot b$.

Úloha 2.7.

Mezitím co Kouma počítal, Ňouma seděl u televize a sledoval Hloupětínský receptář. Právě tam ukazovali, jak se omezují výrazy. Pro Ňoumu to byla brnkačka, protože si to pamatoval z loňské třetí série. Na závěr dali divákům za úkol dokázat, že výraz

$$(ab+bc+ac)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right]$$

lze omezit zdola číslem $\frac{9}{4}$, *pokud jsou* a,b,c *kladná (tedy že pro žádná kladná* a,b,c *není hodnota výrazu menší než* $\frac{9}{4}$*). Dokázali byste to také?*

Řešení.

Jak jsme se dozvěděli od řešitelů, byla tato úloha uvedena v komentářích Pražského semináře jako příklad užití metody ABC. My bychom zde rádi prezentovali třetí možný přístup, a to pomocí Čebyševovy nerovnosti, kterou jsme uváděli v našem loňském povídání.

Dokazovanou nerovnost

$$(ab+bc+ac)\left[\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(a+c)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}\right]\geq\frac{9}{4}$$

vynásobíme výrazem $4(a+b)^2(b+c)^2(a+c)^2$, dostaneme tak

$$4\sum_{sym}a^5b+\sum_{sym}a^4bc+\sum_{sym}a^2b^2c^2-3\sum_{sym}a^3b^3-2\sum_{sym}a^3b^2c-\sum_{sym}a^4b^2\geq 0.$$

Nyní se postupně zbavme členů se záporným znaménkem. Muirheadova nerovnost říká, že $\sum_{sym}a^3b^3\leq\sum_{sym}a^5b$, takže přičtením $3\sum_{sym}a^3b^3-3\sum_{sym}a^5b$ k levé straně její hodnotu zmenšíme. Stejně tak můžeme levou stranu zmenšit přičtením $\sum_{sym}a^4b^2-\sum_{sym}a^5b$. Stačí nám tak dokázat (silnější) nerovnost

$$\sum_{sym}a^4bc+\sum_{sym}a^2b^2c^2-2\sum_{sym}a^3b^2c\geq 0,$$

po vydělení kladným výrazem abc

$$\sum_{sym}a^3+\sum_{sym}abc-2\sum_{sym}a^2b\geq 0,$$

$$\sum_{sym}a^3+\sum_{sym}abc-\sum_{sym}a^2b-\sum_{sym}a^2c\geq 0,$$

$$\sum_{sym}a^3+abc-a^2b-a^2c\geq 0,$$

$$\sum_{sym}a(a-b)(a-c)\geq 0.$$

Poslední z uvedených nerovností je Schurova nerovnost, která platí pro kladná a,b,c. Protože jsme k ní došli ekvivalentními úpravami, platí i zadaná nerovnost.