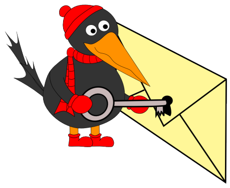
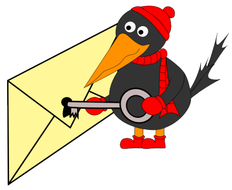


Řešení 1. série

Afinní roviny



Úloha 1.1.

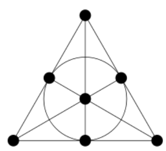
To už tak jednou končilo léto, ale ještě pořád svítilo sluníčko, a Liběnka chytala poslední bronz venku na zahradě. Jak měla zavřené oči, tak si vzpomněla na dovolenou v zahraničí, kde potkala zvláštní skupinku 25 lidí. Byli dohromady z 5 různých států a každý z nich měl na sobě tričko jedné z 5 barev (žádní dva lidé stejné národnosti neměli tričko stejné barvy). Najednou ji napadlo: Dokázala bych je seřadit do čtverce tak, aby v žádném sloupci ani řádku nebyli dva lidé stejné národnosti a aby v žádném řádku ani sloupci nebyli dva lidé se stejnou barvou trička? Nedalo jí to a už si běžela pro papír si to nakreslit. Pomůžete jí?

Řešení.

Označme si národnosti po řadě čísly $1, 2, 3, 4, 5$ a barvy triček písmeny a, b, c, d, e. Určitě jste si všimli, že seřazení lidí do čtverce tak, aby neměli žádní dva lidé ve sloupci ani v řádku stejnou národnost, je to samé, jako sestrojit latinský čtverec řádu 5 z čísel $1, \dots 5$. Stejně tak seřazení podle triček je to samé, jako sestrojit latinský čtverec řádu 5 z $a, \dots, e$. Protože musíme současně řadit jak podle národností, tak podle triček, je tedy naším úkolem sestrojit dva ortogonální čtverce řádu pět. Řešení není jednoznačné, existuje více dvojic ortogonálních čtverců řádu pět. Pro příklad uvedeme třeba tyto dva:

$$\text{národnosti} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{trička} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ b & c & d & e & a \\ c & d & e & a & b \\ d & e & a & b & c \\ e & a & b & c & d \end{pmatrix}$$

Úloha 1.2.



Ještě než si Liběnka stihla vyřešit svoji úlohu, už tu byl Matěj s nějakou čmáranicí a mával jí s tím před obličejem. „Liběnko, schválně, že neuhodneš, co to je!“ Liběnka se vyčítavým pohledem rychle mrkla na Matějův papír, ale bylo na něm pouze pár teček a nějaké spojnice mezi nimi (viz obrázek). Než se stačila Liběnka zamyslet, už na ni Matěj znovu pokřikoval: „Liběnko, to je přeci Fanova rovina! Ale dám ti úkol. Kolika způsoby ji můžeme zobrazit samu na sebe tak, aby trojice, které byly spojené (přímkou nebo kružnicí), zůstaly spojené?“

Řešení.

To, že spojené trojice mají zůstat spojené, můžeme pochopit i tak, že pokud nějakým bodem procházely určité spojnice, musí jím procházet i po zobrazení. Určitě jste si všimli, že každým bodem procházejí tři spojnice a ostatní čtyři jdou mimo tento bod. Vezměme tedy pevně jeden bod A. Pro tento bod máme celkem 7 možností, kam jej zobrazíme. S tímto bodem jsme již zajistili, že tři spojnice, které tímto bodem procházely, budou procházet i jeho obrazem. Zbývá nám zobrazit spojnice, které bodem A neprocházejí. Tyto čtyři spojnice můžeme zobrazit 4! způsoby. Dohromady máme $7 \cdot 4! = 168$ způsobů, jak zobrazit Fanovu rovinu samu na sebe.

Úloha 1.3.

Mezitím, co děti byly venku na zahradě, se Henry díval na televizi. Zrovna běžela jakási sportka, ve které je výhra za uhodnutí vylosované dvojice z 25 čísel. Na tiketu však lidé mohou vyplnit 5 čísel a vyhrají, pokud mají zatržená obě losovaná čísla. A Henry přemýšlel: „Kolik nejméně tiketů bych si musel koupit a zatrhnout, abych měl jistou výhru? A která čísla bych vlastně musel na těch tiketech zatrhnout?“ Stihnete to vymyslet dříve než Henry?

Řešení.

Naším úkolem je najít soustavu takových pětic z čísel $1, \ldots, 25$ tak, aby každá dvojice z těchto čísel byla v právě jedné pětici (kdyby byla ve více pěticích, nebyl by počet pětic minimální). K řešení tohoto příkladu využijeme konečnou afinní rovinu, která má 25 bodů. V definici roviny se říká, že každé dvě přímky roviny se protínají nejvýše v jednom bodě (tzn. žádné dva body nemají společných víc přímek). Stačí tedy najít všechny přímky konečné afinní roviny, která má 25 bodů. Pokud si rovinu znázorníte, jako tabulku 5×5, lze snadno vypozorovat, že každým bodem prochází celkem 6 přímek. Celkem máme tedy $\frac{25 \cdot 6}{5}$ přímek (pětic). Na závěr opět uveďme příklad systému pětic, které musel Henry na svém tiketu zaškrtnout.

1	2	3	4	5	1	10	14	18	22
6	7	8	9	10	2	6	15	19	23
11	12	13	14	15	3	7	11	20	24
16	17	18	19	20	4	8	12	16	25
21	22	23	24	25	5	9	13	17	21
1	6	11	16	21	1	8	15	17	24
2	7	12	17	22	2	9	11	18	25
3	8	13	18	23	3	10	12	9	21
4	9	14	19	24	4	6	13	20	22
5	10	15	20	25	5	7	14	16	23
1	7	13	19	25	1	9	12	20	23
2	8	14	20	21	2	10	13	16	24
3	9	15	16	22	3	6	14	17	25
4	10	11	17	23	4	7	15	18	21
5	6	12	18	24	5	8	11	19	22

Úloha 1.4.

Henrymu úloha moc dlouho netrvala, a tak se vydal na zahradu podívat se to, co tam děti vyvádějí. Než ale vyšel ze dveří ven, všiml si, že mu na nástěnce visí ještě jedna nevyřešená úloha. „Nu což, děti určitě nic nevyvedou a já tu mám tuhle úlohu už tak dlouho, že je ostuda, že tu ještě visí.“ Henry se totiž vždycky zarazí v úvodu, měl by ji už jistě dávno vyřešenou, ale z definice na to ne a ne přijít. Ta úloha zní: z definice afinní roviny (opakuji, z definice) ukažte, že konečná afinní rovina má pro nějaké přirozené n právě n^2 bodů a $n^2 + n$ přímek, na každé je právě n bodů a každým prochází $n + 1$ přímek. Pomůžete Henrymu, ať už ho tato úloha tak netíží?

Řešení.

Začneme tím, že ukážeme, že všechny přímky konečné afinní roviny mají stejný počet bodů. Nechť p je přímka tvořená body $A_1, \ldots, A_n$ a nechť Q je libovolný bod takový, že $Q \notin p$ (ten existuje podle třetího bodu z definice). Podle druhého bodu existuje právě jedna přímka q taková, že $Q \in q, p \cap q = \emptyset$. Budeme tedy chtít ukázat, že i přímka q má n bodů. Pro každý bod $A_i \in p$ existuje podle prvního bodu právě jedna přímka r_i taková, že spojuje body A_i, Q. Pro $A_i \neq A_j$ je zřejmě $r_i \neq r_j$ (pokud by $r_i = r_j$, došli bychom ke sporu s nekolineárností bodů A_i, A_j, Q). Zvolme libovolný pevný bod $A_i \in p$. Podle druhého bodu prochází každým bodem $A_j \in p, A_j \neq A_i$ právě jedna přímka disjunktní s r_i, označme ji s_j. Přímka s_j protne přímku q právě v jednom bodě $S_j, j \neq i$ různém od Q (protože $s_i \neq r_i$). Na přímce q tedy leží body $Q, S_j, i \neq j$. Na přímce q už nemůže ležet žádný další bod. Pokud by existovalo $C \in q, C \neq Q$, pak by podle druhého bodu existovala přímka c taková, že $c \cap r_i = \emptyset$, tj. $c \neq q$ $(Q \in q \cap r_i)$. Pokud by bylo $C \neq S_j$, pak $c \neq s_j$. Pak by ale c protla přímku p v bodě různém od a_i pro všechna $i = 1, \ldots, n$, což by vedlo ke sporu. Tedy na přímce q leží rovněž n bodů.

Jistě vám neuniklo, že jsme současně s tím dokázali, že libovolným bodem jde $n + 1$ přímek. Podívejme se blíže na bod Q. Tím prochází n přímek, z nichž každá jej spojuje s jedním A_i. Ještě je zde přímka q, která je rovnoběžná s p, tedy máme celkem $n + 1$ přímek procházejících bodem Q. Více jich být určitě nemůže, protože pak bychom se dostali do sporu s druhým bodem z definice.

Kadým bodem A_i přímky p prochází n přímek různých od p, máme tedy n^2 přímek, které p protínají. Každým bodem, který na p neleží prochází právě jedna rovnoběžka. Takových rovnoběžek je celkem $n - 1$ (Více jich být nemůže, protože pak bychom se dostali do sporu s počtem bodů na přímkách). Dohromady máme celkem $n^2 + n - 1 + 1 = n^2 + n$ přímek. Nyní nám zbývá už jen spočítat počet bodů roviny. Na každé přímce je n bodů, tedy $n^3 + n^2$ bodů dohromady na přímkách. Ale nesmíme zapomenout na to, že každý bod je společný pro $n + 1$ různých přímek. Máme tedy dohromady $\frac{n^3+n^2}{n+1} = n^2$ bodů.

Úloha 1.5.

Zato Kouma neměl sluníčko vůbec rád. V těchto vedrech chodil nejčastěji do lesa, aby se trošku zchladil. Moc rád hledal houby, ale to šlo jen po dešti a teď zrovna vůbec žádné nerostly. Dneska vytáhl i Ňoumu, ať se po tom lese neloudá sám. Ňouma se ho snažil v těchto dnech rozveselit, a tak vždycky přišel s nějakým zajímavým problémem. Zrovna uviděl na zemi několik hromádek šišek a povídá: „Koumo, podívej na ty tři hromádky šišek! To je ale zajímavé! Počet šišek na první hromádce (označme a) se přesně rovná vzdálenosti první hromádky od druhé. Počet šišek na druhé hromádce (označme b) se rovná vzdálenosti druhé hromádky od třetí. A počet šišek na třetí hromádce (c) je vzdálenost mezi první a třetí hromádkou.“ „No a co s tím?“ ptá se Kouma. „Dosaď si je nyní do této rovnice $x^2 + (2ab + 1)x + a^2 + b^2 = c^2$ *a dokaž, že pokud jsou řešením pro x celá čísla, že ty hromádky šišek tvoří pravoúhlý trojúhelník.“ Zvládli byste to také dokázat?*

Řešení.

Označme si e, d kořeny rovnice. Z Viètových vztahů vyplývá, že

$$e + d = -2ab - 1 \qquad e \cdot d = a^2 + b^2 - c^2.$$

Pokud by byl jeden kořen nulový, je $a^2 + b^2 = c^2$ a z Pythagorovy věty jsme hotovi. Dále pro spor předpokládejme, že jsou oba kořeny nenulové, a dokažme, že to nemůže nastat.

Z trojúhelníkové nerovnosti víme, že c je mezi $|a - b|$ a $a + b$, odkud odvodíme, že $a^2 + b^2 - c^2$ je v intervalu $(-2ab, 2ab)$, proto $|ed| < 2ab = -1 - e - d$. Protože je součet kořenů záporný, mohou nastat jen dva případy:

- Oba kořeny jsou záporné. Pak $ed < -1-e-d$, $ed+e+d+1 < 0$, $(e+1)(d+1) < 0$. Pak by muselo $e + 1$ nebo $d + 1$ být kladné, což znamená nezápornost některého z kořenů, což nelze.
- Jeden kořen (BÚNO d) je záporný, druhý kladný. Pak $-ed < -1 - e - d$, $ed - e - d + 1 < 2$, $(e - 1)(d - 1) > 2$. Činitel $d - 1$ je nejvýše -2, činitel $e - 1$ alespoň 0, přitom musí mít oba stejné znaménko, což nelze.

V obou větvích jsme došli ke sporu, proto polynom nemůže mít nenulové kořeny a trojúhelník musí být pravoúhlý.

Úloha 1.6.

Koumovi se hnedka srdíčko zatetelilo, když mohl použít v takovém neskutečném horku mozek a už vymýšlel příklad na oplátku Ňoumovi. A teďka zase já! Vidíš támhleten kruh v obilí? Jak je vepsaný do toho trojúhelníku? Označ si střed té kružnice O a vrcholy toho trojúhelníka A, B, C. Teď půjdeme po přímce směrem k bodu O a postupně protneme přímky AB v bodě M, AC v bodě N a BC v bodě P. Samozřejmě přejdeme přes bod O. Zvládneš nyní dokázat, že

$$\frac{a}{|BP| \cdot |PC|} + \frac{b}{|CN| \cdot |NA|} + \frac{c}{|AM| \cdot |MB|} = \frac{(a + b + c)^2}{abc} \ ?$$

Pozor, vzdálenosti uvažujeme orientované. Pokud je např. bod P vnitřním bodem BC, jsou vzdálenosti BP a PC orientovány shodně a jejich součin je kladný. Pokud by bod P byl vnějším bodem úsečky BC, jsou vzdálenosti BP a PC orientovány opačně a jejich součin je záporný.

Řešení.

Bod M dělí stranu AB v poměru $AM : BM$. To lze formulovat také tak, že M je těžištěm bodů A, B, kde A má hmotnost BM a B má hmotnost AM. Analogicky můžeme i body N a P vyjádřit jako těžiště vhodně hmotnostně ohodnocených dvojic vrcholů trojúhelníka ABC.

Nyní se pokusme vyjádřit O jako těžiště vhodně ohodnocených vrcholů A, B, C. Hmotnosti těchto vrcholů označme p, q, r. Bod X s hmotností t budeme zapisovat jako (X, t). Spojnice AO je těžnicí $\{(A, p), (B, q), (C, r)\}$, musí proto procházet těžištěm $\{(B, q), (C, r)\}$. Protože je AO osou úhlu α, musí dělit BC v poměru $b : c$, poměr vah q, r je proto $b : c$. Analogicky to musí fungovat pro ostatní osy úhlů, proto p, q, r jsou ve stejných poměrech jako a, b, c a O je těžištěm $\{(A, a), (B, b), (C, c)\}$.

Nyní máme body M, N, P, O vyjádřeny jako těžiště bodů A, B, C s vhodnými hmotnostmi, v případě M, N, P je vždy jedna z hmotností nulová. Skutečnost, že X je těžištěm $\{(A, m_a), (B, m_b), (C, m_c)\}$, budeme zapisovat jako $X(m_a : m_b : m_c)$, tedy například $O(a : b : c)$. Této trojici se říká barycentrické souřadnice. Všimněme si, že taková trojice není pro daný bod určena jednoznačně: když ji čímkoliv vynásobíme, dostaneme ten stejný bod. Proto se nám bude hodit abstrahovat od původně zvolených hmotností pro M, N, P a zobecnit na $M(u : v : 0)$, $N(w : 0 : x)$, $P(0 : y : z)$. Protože víme, že $u : v = BM : AM$, máme $AM = c \cdot \frac{v}{u+v}$, $BM = c \cdot \frac{u}{u+v}$. Dokazovaná rovnice je vzhledem k novým proměnným tvaru

$$\frac{(y+z)^2}{ayz} + \frac{(u+v)^2}{cuv} + \frac{(w+x)^2}{bwx} = \frac{(a+b+c)^2}{abc}.$$

Nyní je potřeba si uvědomit, že tři body leží na přímce, právě když barycentrické souřadnice jednoho jsou lineární kombinací barycentrických souřadnic zbylých dvou. Protože M, N a O leží na přímce, je $(w, 0, x) = k(a, b, c) + l(u, v, 0)$ pro nějaké k, l. Aby byla prostřední složka nulová, musí být $k = v$, $l = -b$ (ostatní řešení jsou násobky tohoto, ale jak jsme uvedli výše, souřadnice lze násobit libovolně). Po dosazení $w = ub - va$, $x = -vc$. Analogicky pro body M, O, P je $(0, y, z) = m(a, b, c) + n(u, v, 0)$, odkud $y = va - ub$, $z = -uc$. Po dosazení do původní rovnice

$$\frac{(va-ub-uc)^2}{a(ub-va)uc} + \frac{(u+v)^2}{cuv} + \frac{(ub-va-vc)^2}{b(va-ub)vc} = \frac{(a+b+c)^2}{abc}.$$

Úpravy na kýžený tvar $0 = 0$ zahrnují pouze rutinní převedení na společného jmenovatele, roznásobování a krácení zlomků, proto je ponecháváme laskavým čtenářům.

Úloha 1.7.

Stejně jako každým rokem se i letos na konci léta pořádá mezi Lenošínem a Hloupětínem VMV (Velká matematická válka). Soupeří zde ty největší mozky z obou vesnic a snaží se vyřešit zapeklité příklady. Letos byla poměrně nízká úroveň, ale za to se objevil jeden příklad, který nakonec rozhodl o vítězi, kterým se stal jako každým rokem Lenošín (jsou sice líní, ale hloupí rozhodně ne;)). Troufnete si na takový příklad? Máte dokázat, že polynom s celočíselnými koeficienty nemůže splnit současně $P(a) = b$, $P(b) = c$ a $P(c) = a$ pro žádná tři různá celá čísla a, b, c.

Řešení.

Tento příklad vyřešíme sporem. Předpokládejme tedy, že tři uvedené rovnosti platí současně. Tyto tři rovnice můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} P(x) - b &= (x-a)P_1(x) \\ P(x) - c &= (x-b)P_2(x) \\ P(x) - a &= (x-c)P_3(x). \end{aligned}$$

Pokud vám není jasný přechod mezi zadáním a těmito rovnicemi, zkuste do první z nich dosadit a místo x, do druhé b a do třetí c. Nyní z čísel a, b, c vyberme tu dvojici, která má největší absolutní hodnotu rozdílu. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že je to $|a-c|$. Pak platí, že $|a-b| < |a-c|$. Dosazením c do první z rovnic dostáváme

$$a - b = (c - a)P_1(c).$$

Protože P_1 je celé číslo, dostáváme, že $|a-b| \geq |c-a|$, což vede ke sporu s $|a-b| < |a-c|$.