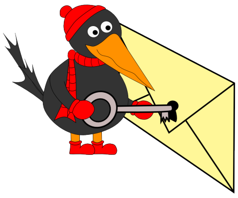
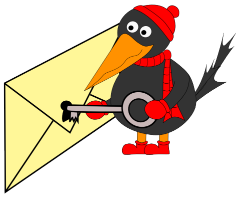


Řešení 6. série

Komplexní čísla



Úloha 6.1.

Lenošínská pošta představila svou zbrusu novou kolekci známek pro jaro 2010. Protože byl poštmistr současně členem klubu Lenošínského matematického pléna (známého jako LEMPL), rozhodl se na každé z nich zachytit nějakou 2010-tou odmocninu z 1. Kolekce tak čítala 2010 kusů známek. Na výstavu se přišel podívat i sám starosta. Protože nemohl zapřít svou LEMPLovskou minulost, v duchu čísla na jednotlivých známkách umocňoval na 2009. Když pak všechny takto získané mocniny sečetl, dostal ke svému překvapení reálné číslo. Jaké číslo to bylo?

Řešení.

Všechna čísla na známkách splňují $x^{2010} = 1$, platí pro ně tedy $x^{2009} = \frac{1}{x}$. Protože $(\frac{1}{x})^{2010} = 1$, patří $\frac{1}{x}$ také mezi 2010-té odmocniy z 1. Umocněním na 2009 se tedy odmocniny pouze přeuspořádají (-1 a 1 zůstanou na místě, ostatní odmocniny se v rámci dvojic $x, \frac{1}{x}$ prohodí). Počítáme tedy součet všech odmocnin z 1, tedy

$$S = 1 + e^{2i\pi/2010} + e^{4i\pi/2010} + \cdots + e^{2\cdot 2009 i\pi/2010}.$$

Toto nám připomíná geometrickou posloupnost. Použijeme stejný trik, jakým se odvozuje vzorec pro součet geometrické posloupnosti: rovnost vynásobíme $1 - e^{2i\pi/2010}$. Na levé straně se zruší všechny členy kromě krajních, zůstane

$$(1 - e^{2i\pi/2010})S = 1 - e^{2\cdot 2010 i\pi/2010} = 1 - e^{2\pi i}.$$

Protože ale $e^{2\pi i} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$, máme $(1 - e^{2i\pi/2010})S = 0$. Hodnota závorky je nenulová, nulové proto musí být S.

Starosta se tedy dopočítal k nule.

Úloha 6.2.

Kousek od Hloupětína, za mlhou hustou tak, že by se dala krájet, se nachází malé jezírko. Na první pohled je obyčejné, ale na ten druhý si všimneme, že má tvar kruhu o poloměru přesně deset metrů. Na jeho obvodu stojí pět vrb, které tvoří pravidelný pětiúhelník. Když tam šli Matěj s Henrym řezat proutí na mrskačky, všimli si, že když vynásobí druhou mocninu vzdálenosti mezi sousedními vrbami a druhou mocninu vzdálenosti mezi vrbami nesousedními, dostanou tuze zajímavé číslo. Uměli byste ho spočítat také?

Řešení.

Vrby si představíme jako body v Gaussově rovině otočené tak, že jedna z vrb leží na reálné ose. Aby se nám lépe počítalo, budeme uvažovat jejich souřadnice v dekametrech. Jedna vrba tak má souřadnice $(1, 0)$, další $(cos(\frac{2k\pi}{5}), sin(\frac{2k\pi}{5}))$, kde $k \in \{1, 2, 3, 4\}$. Položíme-li $\zeta = (cos(\frac{2\pi}{5}), sin(\frac{2\pi}{5}))$, jsou vrcholy pětiúhelníka v bodech $1, \zeta, \zeta^2, \zeta^3, \zeta^4$. Hodnota, kterou chceme určit, je pak $H = |\zeta - 1|^2 |\zeta^2 - 1|^2$. Využitím rovností $|z|^2 = z\overline{z}$

a $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ máme $H = (\zeta - 1)(\overline{\zeta} - 1)(\zeta^2 - 1)(\overline{\zeta}^2 - 1)$. Protože $\zeta\overline{\zeta} = |\zeta|^2 = 1$, máme $\overline{\zeta} = \zeta^{-1}$. Proto

$$\begin{aligned} H &= (\zeta - 1)(\zeta^{-1} - 1)(\zeta^2 - 1)(\zeta^{-1} - 1) = \\ &= (1 - \zeta - \zeta^{-1} + 1)(1 - \zeta^2 - \zeta^{-2} + 1) = \\ &= (2 - \zeta - \zeta^{-1})(2 - \zeta^2 - \zeta^{-2}) = \\ &= 4 - 2(\zeta + \zeta^{-1} + \zeta^2 + \zeta^{-2}) + \zeta^3 + \zeta + \zeta^{-1} + \zeta^{-3}. \end{aligned}$$

Pokud využijeme toho, že $\zeta^5 = 1$, máme $\zeta^{-k} = \zeta^{5-k}$, proto

$$H = 4 - (\zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4) = 5 - (1 + \zeta + \zeta^2 + \zeta^3 + \zeta^4).$$

Analogicky jako jsme v prvním příkladě dokázali, že součet 2010-tých odmocnin z 1 je nula, lze ukázat, že i součet pátých odmocnin z 1 nula. Proto platí $H = 5$. Protože jsme uvažovali v desítkách metrů a výsledkem je v m^4, je třeba výsledek vynásobit $10^4\mathrm{m}^4$. Dostáváme tak, že hledaná hodnota je $50000m^4$.

Úloha 6.3.

V neděli večer si Henry s Matějem začali dělat plán, jak nejlépe obejít chalupy všech známých v Hloupětíně. Matěj na mapě vyznačil Kleverovic domek jako bod A a navrhl jít přímou cestou do bodu B, kde bydlí Bubla. Henry namítl, že by bylo lepší se cestou stavit i v bodě E, který leží v půli cesty mezi A a B a kde bydlí jeho švagrová. Nakonec měli na plánku bodů osm. Body A, B, C, D, které tvořily konvexní čtyřúhelník, a body E, F, G, H, které byly postupně ve středech úseček AB, BC, CD a DA. Nejdále od Kleverovic domu byl bod C, k němu to byl vzdušnou čarou rovný kilometr. Když chtěl Matěj měřit vzdálenost od B k D, zarazil ho Henry: „To si přece můžeš spočítat, když víš že spojnice EG a FH jsou na sebe kolmé!“ Matěj musel uznat, že má Henry pravdu. Dokázali byste to také spočítat?

Řešení.

Vrcholy ztotožníme s komplexními čísly a, b, c, d. Jedna úhlopříčka odpovídá komplexnímu číslu $a-c = f$, druhá $b-d = g$. Spojnice středů stran jsou $(a+b)/2-(c+d)/2 = (f-g)/2$ a $(a+d)/2-(b+c)/2 = (f+g)/2$. Úhel mezi spojnicemi středů stran je roven $\alpha = \mathrm{Arg}\left(\frac{f+g}{f-g}\right) = \mathrm{Arg}\left(\frac{(f+g)(\overline{f}-\overline{g})}{(f-g)(\overline{f}-\overline{g})}\right)$. Jmenovatel posledního zlomku je reálné číslo a na argument nemá vliv. Platí proto $\alpha = \mathrm{Arg}(f\overline{f} - g\overline{g} + g\overline{f} - f\overline{g})$. Číslo $X = f\overline{f} - g\overline{g}$ je reálné, číslo $Y = g\overline{f} - f\overline{g}$ je rozdílem dvou komplexně sdružených čísel, a je proto ryze imaginární. My víme, že je úhel α pravý, proto X musí být nulové a Y nenulové. Číslo X je rovno $|f|^2 - |g|^2$, což je nula pro $|f| = |g|$. Číslo Y v takovém případě být nulové nemůže, protože pak by musel i součin $(f + g)(\overline{f} - \overline{g})$ být nenulový a s ním i jedna ze spojnic stran.

Platí proto $|BD| = |AC| = 1\mathrm{km}$.

Úloha 6.4.

Ráno přišli Henry s Matějem za Bublou koledovat. Bubla jim ale řekla, že za koledu nic nedostanou, dokud nenajdou všechny polynomy f, pro které $f(x^2) = f(x)f(x + 1)$. Dokázali byste jim s hledáním těchto polynomů pomoci?

Řešení.

Předpokládejme, že f má v komplexních číslech kořen z různý od 0. Dosazením $x = z$ dostáváme, že i z^2 musí být kořen. Kdyby platilo $|z| > 1$, měl by polynom kořeny z, z^2, z^4, $\ldots$, jejichž absolutní hodnoty tvoří rostoucí posloupnost. Jediný polynom, který může mít nekonečně mnoho různých kořenů je ale polynom nulový. Analogicky není možné, aby platilo $|z| < 1$. Všechny nenulové kořeny f mají proto absolutní hodnotu 1.

Když za x dosadíme $z-1$, dostáváme, že $(z-1)^2$ je kořen, proto buď $z-1 = 0$ nebo $|z-1|^2 = 1$, $|z-1| = 1$. V prvním případě máme $z = 1$, ve druhém leží bod odpovídající číslu z v Gaussově rovině v průsečíku jednotkových kružnic se středy 0 a 1, platí proto buď $z = -\omega$ nebo $z = -\overline{\omega}$, kde $\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$. Jak jsme ale již dokázali, druhé mocniny kořenů f jsou také kořeny f. Kdyby bylo $-\omega$ kořenem, bylo by kořenem i ω^2, což je ale číslo, které nespňuje podmínku $|z-1| = 1$. Analogicky nemůže být kořenem ani $-\omega^2$. Jediné kořeny, které může f v $\mathbb{C}$ mít, jsou proto 0 a 1. Za f tak můžeme do zadané rovnosti dosadit $x^a(x-1)^b$ a hledat, pro která přirozená a, b bude platit rovnost

$$x^{2a}(x^2-1)^b = x^a(x-1)^b(x+1)^a x^b,$$

po vydělení $x^a(x-1)^b$ dostaneme $x^a(x+1)^b = (x+1)^a x^b$, což platí právě když $a = b$.

Zadané rovnici vyhovují polynomy $f(x) = (x(x-1))^a$, kde a je libovolné nezáporné celé číslo.

Úloha 6.5.

Kouma si s nějakým pletením mrskačky hlavu nelámal. Přišlo mu kýčovité, aby se všichni hloupětínští předváděli, jak slaví Velikonoce jen proto, aby se dostali do zadání šesté série. Místo toho ležel doma na gauči a v duchu hledal přirozená čísla n taková, že $2n-1$ a $5n-1$ jsou druhé mocniny přirozených čísel a $2n+5$ je prvočíslo. Zvládli byste je také všechny najít?

Řešení.

Položíme $2n-1 = a^2$, $5n-1 = b^2$ (kde a, b jsou přirozená) a zkusme vyjádřit $5n+2$ pomocí a, b. To lze ve tvaru

$$2n+5 = 4(5n-1) - 9(2n-1) = 4a^2 - 9b^2 = (2b-3a)(2b+3a).$$

Druhá závorka má hodnotu alespoň 5, aby šlo o prvočíslo, musí být první závorka 1. Musí platit $2b - 3a = 1$, tedy $2\sqrt{5n-1} - 3\sqrt{2n-1} = 1$, po umocnění

$$4(5n-1) + 9(2n-1) - 12\sqrt{10n^2-7n+1} = 1,$$
$$-12\sqrt{10n^2-7n+1} = 14 - 38n,$$

po vydělení dvěma a dalším umocnění $36(10n^2 - 7n + 1) = 49 - 266n + 361n^2$, po převedení na pravou stranu $0 = 13 - 14n + n^2$. To je kvadratická rovnice s kořeny 1 a 13. Zkouškou snadno ověříme, že čísla 1 a 13 mají požadované vlastnosti.

BRKOS Team 2010

Úloha 6.6.

Když se Henry s Matějem vypořádali s polynomy, pozvala je Bubla dál. Nabídla jim rozkrájený mazanec, který sama napekla. Trošku se jí nepovedl, a tak získal tvar velmi plochého kvádru o hranách 20 cm, 20 cm a 2 cm. Při krájení vždy používala řezy rovnoběžné s některou z menších stěn kvádru, celková délka průmětů řezů (do roviny čtvercové stěny mazance) byla 360 cm. Řezy nemusely spojovat kraje mazance. Protože čekala hodně koledníků a chtěla, aby žádný z nich nedostal moc velký kus, snažila se rozkrájet mazanec tak, aby největší ze vzniklých dílků byl co nejmenší. Jaký nejmenší objem mohl největší dílek mít?

Řešení.

Protože jsou řezy kolmé ke čtvercové stěně, redukuje se úloha na dvojrozměrný problém. Na dílky mazance se budeme dívat jako na rovinné obrazce a budeme se snažit minimalizovat obsah největšího z nich. Protože každý řez odděluje dva dílky a každá strana čtverce se dotýká jednoho, je součet obvodů dílků roven $2 \cdot 360\text{cm} + 4 \cdot 20\text{cm} = 800\text{cm}$.

Nyní ukážeme, že obsah dílku je nejvýše roven druhé mocnině čtvrtiny jeho obvodu. Pokud má dílek tvar obdélníka o stranách a, b, z nerovnosti $(a-b)^2 \geq 0$ dostáváme přičtením $4ab$ k oběma stranám $(a+b)^2 \geq 4ab$. Levou stranu vyjádříme pomocí obvodu jako $(\frac{o}{2})^2$, pravou pomocí obsahu jako $4S$. Úpravou dostáváme dokazovanou nerovnost $S \leq (\frac{o}{4})^2$. Pro dílky, které nejsou obdélníkové, platí, že jim lze opsat obdélník o větším obsahu a menším obvodu. Proto pomocné tvrzení platí pro všechny možné dílky.

Řekněme, že by všechny dílky měly obvod menší než 8cm, tedy obsah menší než 4. Aby pokryly celou plochu 400cm^2, muselo by jich být více než 100, takže by musely mít celkový obvod větší než 800, což nelze. Dílky mají proto obvod alespoň 8cm a je jich nejvýše 100. Některý z nich (a zejména ten největší) musí mít obsah alespoň 4cm^2.

Zbývá ukázat, že lze obsah 4cm^2 dosáhnout. K tomu stačí rozřezat čtverec na 100 čtvercových dílků o straně 2cm osmnácti řezy délky 20.

Největší dílek má proto objem $4\text{cm}^2 \cdot 2\text{cm} = 8\text{cm}^3$.

Úloha 6.7.

Když Koumu omrzelo hledání přirozených čísel se zajímavými vlastnostmi, šel se podívat, co dělá Ňouma. Našel ho u tabule, na kterou právě napsal čísla od 1 do 2010, každé dvakrát, a snažil se je přeuspořádat. Na Koumův dotaz, o co se snaží, odpověděl: „Chci je přerovnat tak, aby mezi dvěma výskyty čísla i bylo přesně $i-1$ čísel. Tedy mezi jedničkami nic, mezi dvojkami jedno číslo, ... a takto až do 2010.“ „A ty věříš, že se ti to povede?“ zeptal se Kouma. Mohlo se to Ňoumovi povést? Pokud ano, jak? Pokud ne, proč?

Řešení.

Předpokládejme, že to jde. Pro každé číslo $k \in \{1, \ldots, 2010\}$ definujme a_k a b_k jako pořadí prvního a druhého výskytu čísla k ve výsledné posloupnosti. Mezi čísly a_k a b_k se každé číslo od 1 do 4020 vyskytne právě jednou, jejich součet je proto $S = \frac{4020 \cdot 4011}{2} = 2010 \cdot 4011$. Protože mezi dvěma výskyty čísla k je $k-1$ čísel, platí $b_k = a_k + k$. Součet všech $a_k + b_k$ lze proto zapsat jako

$$S = \sum_{k=1}^{2010} a_k + a_k + k = 2 \sum_{k=1}^{2010} a_k + \sum_{k=1}^{2010} k = 2 \sum_{k=1}^{2010} a_k + \frac{2010 \cdot 2011}{2} = 2 \sum_{k=1}^{2010} a_k + 1005 \cdot 2011.$$

Musí tedy platit $2010 \cdot 4011 - 2 \sum_{k=1}^{2010} a_k = 1005 \cdot 2011$. Na levé straně je číslo sudé, na pravé liché, rovnost proto nemůže nastat.

BRKOS Team 2010