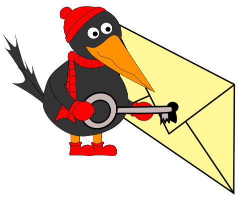
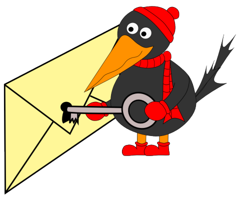


Řešení 5. série

Polynomy



Úloha 5.1.

Do Silvestra zbývaly dva dny a Matěj s Liběnkou zrovna seděli u snídaně, když zazvonil pošťák. Děti mu ihned vyběhly v ústrety. Listonoš se na ně usmál a přes plot podal Liběnce lístek s novoročním $P(f)$ od Akademie hloupětínských matematiků. Liběnka si hned všimla, že pro letošní polynom $P(f)$ platí $P(1) = 2009$, $P(2) = 2010$ a $P(3) = 1989$, a hned to řekla Matějovi. A protože ho chtěla poškádlit, dodala: „Schválně, jestli uhodneš, jaký zbytek dává $P(f)$ po dělení $f^2 - 3f + 2$?“ Matěj jí po chvíli správně odpověděl. Zvládli byste to také?

Řešení. Při dělení polynomem $f^2 - 3f + 2$ nám vyjde podíl $Q(f)$ a zbytek prvního stupně, tedy tvaru $af + b$. Lze proto psát $P(f) = (f^2 - 3f + 2)Q(f) + (af + b)$. Jde o rovnost mezi polynomy, která musí platit nezávisle na tom, jaké f dosadíme. Dosazením jedničky a dvojky dostaneme postupně $2009 = 0 \cdot Q(1) + a + b$, $2009 = 0 \cdot Q(2) + 2a + b$. Řešením této soustavy rovnic máme $a = 1$, $b = 2008$. Abychom mohli s klidným svědomím odpovědět, že hledaný zbytek je $f + 2008$, měli bychom najít alespoň jeden takový polynom P, že vyhoví všem třem podmínkám – takovým polynomem je například $-11x^2 + 34x + 1986$.

Úloha 5.2.

Poslední odpoledne roku věnovali Henry, Liběnka, Matěj a Bubla výrobě chlebíčků. Matěj jich nachystal a, Liběnka b, Henry c a Bubla d. Najednou Bubla řekla: „Také jste přišli na to, že polynom $x^6 - ax^5 + bx^4 - 20x^3 + cx^2 - dx + 1$ má kladné reálné kořeny?“ Matěj se praštil do čela: „Že jsem si toho nevšimnul hned!“ Jaké mohly být hodnoty a, b, c, d, aby měla Bubla pravdu?

Řešení. Víme, že polynom má kladné reálné kořeny x_1 až x_6 (ne nutně různé), pro které platí z Viètových vztahů $x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_4x_5x_6 = 20$ a $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 1$. Z těchto rovností určíme aritmetický i geometrický průměr všech $\binom{6}{3} = 20$ součinů trojic kořenů. Aritmetický průměr vyjde $\frac{20}{20} = 1$, geometrický $\sqrt[20]{1^3} = 1$. Ze třetí série víme, že aritmetický průměr se rovná geometrickému, pouze pokud jsou všechna průměrovaná čísla stejná. Z rovnosti $x_1x_2x_3 = x_1x_2x_4$ máme $x_3 = x_4$, analogicky odvodíme, že jsou stejné hodnoty všech kořenů. Z rovnosti $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = x_1^6 = 1$ pak máme $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 1$, dosazením do Viètových vztahů pak $a = d = 6$, $b = c = 15$.

Úloha 5.3.

Do konce roku zbývalo pár minut a z rádia zněl proslov lenošínského starosty, v němž chválil občany své obce za to, jak celý rok příkladně lenošili. Po něm se slova ujal starosta hloupětínský, který chválou také nešetřil. Jeho projev by se jistě protáhl přes půlnoc, kdyby nebyl přerušen odpočtem: „Deset, devět, osm, …“. Když Matěj ta čísla uslyšel, začal přemýšlet nad tím, kolik nejvýše různých hodnot z množiny $\{1, 2, \ldots, 10\}$ může nabývat polynom pátého stupně s celočíselnými koeficienty. Dokázali byste mu poradit?

Řešení. Nejprve uvažme polynom $P(x) = x + (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$. Pro něj platí $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $\dots P(5) = 5$. Našli jsme tak polynom vyhovující daným podmínkám, který nabývá 5 z daných hodnot.

Nyní předpokládejme, že máme polynom pátého stupně takový, že nabývá hodnot $Q(x_1) = y_1, Q(x_2) = y_2, \dots, Q(x_6) = y_6$ pro 6 různých celých x_i a celých y_i splňujících $1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_6 \leq 10$. Protože jde o polynom s celočíselnými koeficienty, rozdíl mezi největším a nejmenším x_i (který je alespoň 5, neboť jsou x_i různá) musí dělit rozdíl mezi dvěma y_i (který je nejvýše 9). Jediný způsob, jak tohoto dosáhnout, je ten, že budou oba rozdíly v absolutní hodnotě stejné.

Protože $|x_{j+1} - x_j|$ dělí $(y_{j+1} - y_j)$, platí

$$|x_6 - x_1| \leq |x_6 - x_5| + |x_5 - x_4| + \dots + |x_2 - x_1| \leq (y_6 - y_5) + \dots + (y_2 - y_1) = y_6 - y_1.$$

Jak jsme dříve ukázali, výrazy na krajích nerovnosti jsou si rovny, a proto musí platit $|x_{i+1} - x_i| = y_{i+1} - y_i$ a všechny výrazy $x_{i+1} - x_i$ musí mít stejné znaménko.

Pokud jsou všechny $x_{i+1} - x_i$ kladné, platí pro $i \in \{1, \dots, 6\}$ rovnost $x_i - x_1 = y_i - y_1$, tedy $y_i = x_i + y_1 - x_1$. Protože $y_i = Q(x_i)$, znamená to, že $Q(x_i) - x_i - y_1 + x_1 = 0$ pro 6 různých x_i. Polynom $Q(x) - x - y_1 + x_1$ je ale pátého stupně, takže nemůže mít 6 různých kořenů. Pokud by $x_{i+1} - x_i$ byly záporné, dojdeme analogickým způsobem k tomu, že $Q(x) = -x + x_1 - y_1$ má 6 kořenů, což také není možné.

Polynom s celočíselnými koeficienty může pro celá x nabývat nejvýše 5 z 10 uvedených hodnot.

Úloha 5.4.

Protože šly děti spát pozdě, probudil je až kolem desáté hodiny Henry: „Vstávat a cvičit! Jak na Nový rok, tak po celý rok! I mozek se musí tužit! Schválně jestli zjistíte, pro která $n > 1$ je polynom $x^{n(n-1)} + x^{n(n-2)} + \dots + x^n + 1$ ireducibilní nad $\mathbb{Q}$?“

Řešení. Zadaný polynom označme P. Pokud je n složené, platí $n = ab$, kde $a, b > 1$. Pak lze P rozdělit do a-tic členů:

$$(x^{n(ab-1)} + \dots + x^{n(a-1)b}) + (x^{n((a-1)b-1)} + \dots + x^{n(a-2)b}) + (x^{n(b-1)} + \dots + x^0),$$

všimneme si, že každá a-tice vznikne z té následující vynásobením x^{an}. Proto lze polynom rozložit

$$(x^{na(b-1)} + x^{na(b-2)} + \dots + x^0)(x^{n(b-1)} + \dots + x^0).$$

Pro složená čísla je polynom reducibilní, čímž máme vyřešenou větší část problému.

Pro prvočíselná $n = p$ chceme dokázat ireducibilitu. Jediný nástroj, který nám k tomu povídání dalo je Eisensteinovo kritérium. To však nelze použít přímo, je ho potřeba použít v kombinaci s posunutím středu. Místo $P(x)$ budeme uvažovat polynom $P(x+1)$. Ten je součtem p polynomu‘ $P_0, P_1, \dots, P_{p-1}$, přičemž $P_0 = 1$ a $P_k = (x+1)^{pk} = \sum_{i=1}^{pk} \binom{pk}{i} x^i$ pro $k > 0$. Všimneme si, že každý polynom P_i má konstantní člen 1, jejich součet $P(x+1)$ má konstantní člen p. Vedoucí koeficient $P(x+1)$ je 1. Předchozí dvě pozorování nasvědčují tomu, že půjde použít Eisensteinovo kritérium pro prvočíslo p, zbývá dokázat, že p dělí všechny koeficienty $P(x+1)$.

Rozeberme koeficienty jednotlivých P_k modulo p. Rozepíšeme si $\binom{pk}{i} = \frac{(pk)!}{(pk-i)!i!}$. Protože $pk < p^2$, vystupují ve faktoriálech čísla dělitelná p nejvýše v první mocnině. V čitateli jich je k, ve jmenovateli $\left\lfloor \frac{pk-i}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{i}{p} \right\rfloor$. Pokud $p \mid i$, jsou dolní celé části rovny hodnotám zlomků a jejich součet je proto k. Pokud $p \nmid i$, tato rovnost nenastává a v čitateli je jen $k-1$ násobků p. Pro i nedělitelné p dá koeficient u x^i ve všech P_i po dělení p nulu, nulový je proto i v $P(x+1)$.

Pokud $i = cp$, $c \in \mathbb{N}$, lze kombinační číslo zapsat jako zlomek a zkrátit všechna p. Protože nás zajímá pouze zbytek kombinačního čísla po dělení p, lze čísla ve vzniklém zlomku nahradit jejich zbytky po dělení p. Mezi čísly, která nebyla krácena, jsou nyní v čitateli i jmenovateli c-krát 1, c-krát 2, …, c-krát $p-1$. Tato čísla proto můžeme zkrátit. Zbylá čísla vytvoří kombinační číslo $\binom{k}{c}$. U x^{cp} tak máme koeficient $\sum_{k=c}^{p-1} \binom{k}{c}$. Tuto sumu lze ale upravit na kombinační číslo $\binom{p}{c+1}$, které má po rozepsání do faktoriálů p v čitateli a žádné p ve jmenovateli. I tyto koeficienty jsou nulové mod p.

Zbývá vysvětlit, jak jsme upravili sumu kombinačních čísel. Stačí si uvědomit, kolika způsoby lze vybrat $c+1$ z p lidí, pokud jsou seřazení. Můžeme vzít $(c+1)$-tého a c lidí před ním (tzn. lidí s menším pořadím), a to $\binom{c}{c}$ způsoby. Nebo $(c+2)$-tého a c lidí před ním, a to $\binom{c+1}{c}$ způsoby,…, nebo p-tého a c lidí před ním $\binom{p-1}{c}$ způsoby. Celkem těch způsobů ale musí být $\binom{p}{c+1}$, což dává dokazovanou identitu.

Úloha 5.5.

Zabouchání na dveře vytáhlo Koumu od počítače. Zeptal se: „Kdo je tam?“ Z druhé strany se ozvalo: „Rekurze!“ Kouma ale věděl, že je to Ňouma a že mu nejspíš nese zajímavou úlohu. A nemýlil se. Na papírku, který mu kamarád předal, stálo:

Posloupnost $a_1, a_2, \ldots$ je dána vztahy $a_1 = 46$, $a_2 = 33$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$. Najděte všechna i taková, že a_i je druhou mocninou přirozeného čísla.

Řešení. Když si napíšeme prvních několik prvků posloupnosti, všimneme si, že jde o druhé mocniny celých čísel zmenšené o 3. Přesněji řečeno, že $a_n = (8-n)^2 - 3$. Tuto hypotézu dokážeme indukcí. Pro $n = 1$ a $n = 2$ hypotéza platí. Předpokládejme, že platí pro všechna $n < k$ a dokažme ji pro $n = k$. Z rekurzivní rovnice $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} + 2$, po dosazení z indukčního předpokladu

$$\begin{aligned} a_k &= 2((9-k)^2 - 3) - ((10-k)^2 - 3) + 2 = \\ &= 2(k^2 - 18k + 78) - k^2 + 20k - 95 = \\ &= k^2 - 16k + 61 = (8-k)^2 - 3, \end{aligned}$$

což jsme chtěli dokázat. Aby bylo a_i rovno nějakému t^2, muselo by platit $(8-i)^2 - 3 = t^2$, po úpravě $(8-i)^2 - t^2 = 3$. Číslo 3 lze ve tvaru rozdílu čtverců vyjádřit pouze jako 4-1 (pro úplnost je možno to zdůvodnit užitím vztahu $(8-i+t)(8-i-t) = 3$ a jednoznačnosti rozkladu). Proto $8-i$ musí být buď 2 nebo -2, což nám dává pro i dvě možnosti: 6 a 10.

BRKOS Team 2010

Úloha 5.6.

O hloupětínských náměstích a jejich zajímavých tvarech již bylo napsáno mnoho knih a ještě větší počet matematických úloh. Je proto hříchem, že je stále opomíjeno Náměstí distributivity. *Leží v severní části Hloupětína a má tvar trojúhelníka ABC. Druhý nejzajímavější fakt týkající se tohoto náměstí je, že stejná rovnoběžka, která prochází Hloupětínskou radnicí, vede přesně těžištěm tohoto náměstí. Ten úplně nejzajímavější fakt je, že když průsečíky zmíněné rovnoběžky se stranami AB, AC označíme po řadě M, N, pak platí $\frac{|MB|}{|MA|} + \frac{|NC|}{|NA|} = 1$. Uměli byste dokázat úplně nejzajímavější fakt pomocí druhého nejzajímavějšího faktu?*

Řešení. Jednou z možností je dokreslit pár bodů, najít nějaké podobné trojúhelníky a počítat. Rádi bychom ale na této úloze demonstrovali užití Menelaovy věty, která postup zkrátí.

Ta říká, že body X, Y, Z ležící po řadě na polopřímkách AB, BC, AC leží na jedné přímce, právě když $\frac{|AX||BY||CZ|}{|BX||CY||AZ|} = 1$ a právě dva nebo žádný z bodů X, Y, Z leží uvnitř některé strany trojúhelníka ABC.

Střed strany BC označme S. Těžiště T trojúhelníka ABC a body M, N leží na přímce. Ta může být rovnoběžná s BC. Pak využijeme toho, že těžiště leží ve dvou třetinách výšky, a proto $\frac{|MB|}{|MA|} + \frac{|NC|}{|NA|} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Druhou možností je, že MN protne BC v bodě X. Pak z Menelaovy věty pro trojúhelník ABS máme $1 = \frac{|MB||AT||XS|}{|MA||TS||BX|}$, po úpravě a dosazení z $\frac{|AT|}{|TS|} = 2$ máme $\frac{|BX|}{2|XS|} = \frac{|MB|}{|MA|}$. Analogicky Menelaovou větou pro trojúhelník SCA dostaneme $\frac{|CX|}{2|XS|} = \frac{|NC|}{|NA|}$. Sečtením obou rovností $\frac{|BX|+|CX|}{2|XS|} = \frac{|MB|}{|MA|} + \frac{|NC|}{|NA|}$. O výrazu na pravé straně chceme ukázat, že je roven jedné. K tomu je třeba ověřit, že $|BX| + |CX| = 2|XS|$, což je ale důsledek toho, že S je středem BC a bod X leží vně BC. Tím je dané tvrzení dokázáno.

Úloha 5.7.

Starostu Lenošína a Hloupětína nespojuje obyčejný telefonní kabel, ale tzv. červená linka. Z Lenošína do Ošklivína vede linka zelená, zkrátka všech 42 vesnic v okolí Hloupětína je pospojováno telefonními linkami některé ze čtyř barev (každé dvě vesnice jsou spojeny linkou nějaké barvy a každá barva je použita alespoň jednou). Dokažte, že lze vybrat několik vesnic tak, aby linky mezi nimi byly právě tří barev.

Řešení. Budeme postupně odebírat vesnice a rušit linky, které z odebraných vesnic vedou. Budeme přitom sledovat, jak se nám mění počet použitých barev. Na začátku máme barvy čtyři, v okamžiku, kdy zbudou jen dvě vesnice, bude barva jedna. Předpokládejme, že během celého procesu nikdy nebyly mezi neodebranými vesnicemi linky právě tří barev, tedy že odebráním jedné vesnice (BÚNO Ošklivína) zanikly dvě barvy (např. červená a zelená). Pak existují dvě vesnice spojené s Ošklivínem takové, že jedna je k němu připojena zelenou a druhá červenou linkou. Navíc linka mezi nimi není ani zelená, ani červená (jinak by odebráním Ošklivína tyto barvy nevymizely). Za uvedeného předpokladu Ošklivín s těmito dvěma vesnicemi tvoří hledanou trojbarevnou podsíť. Pokud by předpoklad neplatil, je zadané tvrzení splněno triviálně.