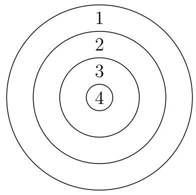
Řešení 4. série

Geometrická pravděpodobnost

Úloha 4.1.

V hloupětínské restauraci se rozhodli uspořádat předvánoční turnaj v šipkách. Jejich terč má poloměr 35 cm a je třemi soustřednými kružnicemi o poloměrech 5, 15 *a* 25 *cm rozdělen na oblasti, jejichž zásah je hodnocen jedním až čtyřmi body podle obrázku. Jaká je pravděpodobnost, že člověk třemi hody šipkou dosáhne součet šest bodů? Pravděpodobnost zásahu je rovnoměrně rozložena na ploše terče (tedy pravděpodobnost, že hráč terč mine, je nulová).*



Řešení. Způsobů, jak hodit součet 6 třemi hody, je celkem 10: (4,1,1), (1,4,1), (1,1,4), (1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,1,2), (3,2,1), (2,2,2). Pravděpodobnost, že daným hodem trefíme 4 body, je rovna poměru ploch kruhů o poloměrech 5 a 35 cm, tedy $\frac{\pi 5^2}{\pi 35^2} = \frac{1}{49}$. Pravděpodobnost, že trefíme 3 body, je rovna poměru obsahu mezikruží s vnějším poloměrem 10 cm a vnitřním 5 cm, tedy $\frac{\pi 15^2 - \pi 5^2}{\pi 35^2} = \frac{8}{49}$. Analogicky určíme pravděpodobnost, že hodíme 2 body, což je $\frac{16}{49}$, a pravděpodobnost, že hodíme 1 bod, ta je $\frac{24}{49}$. Pravděpodobnost, že naházeme trojici (a, b, c), určíme jako součin pravděpodobností hodů a, b a c, tyto součiny posčítáme přes všechny možné trojice. Hledaná pravděpodobnost je proto $\frac{3 \cdot 24^2 \cdot 1 + 6 \cdot 8 \cdot 16 \cdot 24 + 16^3}{49^3}$.

Úloha 4.2.

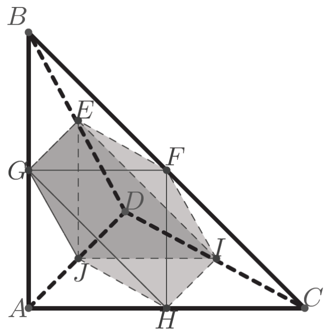
Matěj si usmyslel, že k Vánocům vyrobí Henrymu skládací metr. Koupil metr dlouhé dřevo zanedbatelné tloušťky. Aby to nebyl jen obyčejný metr, rozhodl se Matěj, že dřevo rozdělí na třech náhodně vybraných místech a ze vzniklých čtyř částí dárek vyrobí. Jaká je pravděpodobnost, že vyrobí metr tak, aby ho mohl Henry poskládat do tvaru čtyřúhelníku? Velikost kloubů metru zanedbáváme.

Řešení. Délky prvních třech částí v metrech označíme x, y, z. Taková trojice odpovídá existujícímu rozdělení dřeva, právě když $x > 0, y > 0, z > 0, x + y + z < 1$. Všechny možné body (x, y, z) jsou proto vnitřními body čtyřstěnu s vrcholy $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ a $(0, 0, 1)$.

Ve čtyřúhelníku $ABCD$ díky trojúhelníkové nerovnosti platí $|AB| + |BC| + |CD| + |DA| > |AC| + |CD| + |DA| > |AD| + |DA| = 2|AD|$, analogicky i každá jiná délka strany musí být kratší než polovina součtu všech. Na druhou stranu pokud délky $a \leq b \leq c \leq d$ mají tu vlastnost, že každá je menší než polovina součtu všech, pak lze zvolit délku úhlopříčky e tak, aby $b - a < e < a + b$, $d - c < e < c + d$.

Obvod potenciálního čtyřúhelníka je roven jedné, je proto možné ho sestrojit, právě když $x, y, z > \frac{1}{2}$ a $1 - x + y + z < \frac{1}{2}$. Každá z těchto nerovností určuje jeden poloprostor, v němž musí vyhovující body ležet. Ze čtyřstěnu možných trojic tak odřezává čtyřstěn s ním podobný o poloviční straně a osminovém objemu. Po ořezání zbude $1 - 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ čtyřstěnu, hledaná pravděpodobnost je proto $\frac{1}{2}$.

BRKOS Team 2010



Úloha 4.3.

Když Matěj vyrobil metr, domluvil se s Liběnkou a Bublou, že půjdou další den společně na Vánoční trhy na Lagrangeově náměstí. Usnesli se, že se sejdou na náměstí mezi čtvrtou a pátou hodinou. Pravděpodobnost příchodu každého z nich je rozložena v tomto intervalu rovnoměrně a časy jejich příchodů jsou na sobě nezávislé. Jaká je pravděpodobnost, že se setkají všichni tři, pokud je každý ochoten na náměstí čekat nejdéle 10 minut?

Řešení. Čas příchodu Matěje v desítkách minut od 16.00 označme x, stejnou veličinu pro Liběnku a Bublu po řadě y, z. Množina všech možných trojic (x, y, z) je krychlí o hraně 6 a objemu 216. Vyhovující jsou případy, kdy

1. všichni přijdou v posledních deseti minutách (krychle o hraně 1).
2. Matěj přijde první, a to mezi 16.00 a 16.50, Liběnka a Bubla každá nejvýše 10 minut po něm. Takové situace odpovídají zkosenému hranolu, jehož podstavou je čtverec 1×1 a výška je 5, objem je proto 5.
3. Liběnka přijde první, a to mezi 16.00 a 16.50 – opět zkosený hranol o objemu 5.
4. Bubla přijde první, a to mezi 16.00 a 16.50 – opět zkosený hranol o objemu 5.

Sečtením všech pravděpodobností máme hledaný výsledek $\frac{1+5+5+5}{216} = \frac{2}{27}$.

Úloha 4.4.

Ňouma s Koumou Vánoce neprožívají, a tak tráví advent raději vymýšlením čísel. Ňouma si vymyslel číslo $x \in (-2, 2)$, vybral si ho náhodně s rovnoměrně rozdělenou pravděpodobností. Kouma si vymyslel číslo $y \in (-2, 2)$ také rovnoměrně a navíc nezávisle na Ňoumovi. Určete pravděpodobnost, že pro jejich čísla platí

$$(y^2 + x^2 - 2|x|)(y^2 + x^2 - 2|y|) > 0.$$

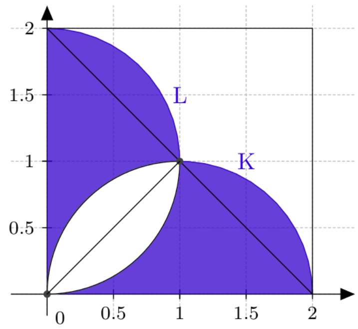
Řešení. Množina, ze které čísla vybírají, je souměrná podle obou souřadných os. Snadno ověříme, že pokud nerovnosti vyhovuje dvojice (x, y), vyhoví i dvojice $(-x, y)$ a $(x, -y)$, podle souřadných os je proto souměrná i množina vyhovujících výsledků. Proto se Ňoumovi a Koumovi stačí omezit při výběru čísel na interval $\langle 0, 2)$ a předpokládat tak $x, y \geq 0$. Zadaná nerovnost se nám pak zjednoduší na tvar

$$(y^2 + x^2 - 2x)(y^2 + x^2 - 2y) > 0.$$

Po doplnění na čtverec

$$(y^2 + (x-1)^2 - 1)((y-1)^2 + x^2 - 1) > 0.$$

Z Pythagorovy věty plyne, že $y^2 + (x-1)^2$ je druhou mocninou vzdálenosti bodů (x, y) a $(1, 0)$. První závorka je záporná, pokud má bod (x, y) vzdálenost od $(1, 0)$ menší než 1, tedy pokud (x, y) leží uvnitř kruhu $K((0, 1), 1)$, analogicky druhá je záporná, pokud (x, y) leží uvnitř kruhu $L((1, 0), 1)$. Aby byla nerovnost splněna, musí bod (x, y) ležet v obou kruzích nebo ani v jednom z nich. Množina vyhovujících bodů je znázorněna na obrázku vpravo. Tato množina vznikne přidáním a následným odebráním dvou kruhových úsečí odpovídajících poloměru 1 a středovému úhlu.



Úloha 4.5.

Henry se rozhodl, že obarví přirozená čísla od jedničky do desítky žlutě, hnědě a červeně. Přitom součet žlutého a hnědého musí být vždy hnědý, součet žlutého a červeného červený a součet červeného a hnědého žlutý. Dále součin žlutého a hnědého je žlutý, součin ***žlutého a červeného*** *také a součin hnědého s červeným je červený. Navíc šestka je žlutá a čtyřka má jinou barvu než devítka. Kolika způsoby se mu to mohlo podařit?*

Řešení. Předpokládejme, že by jednička byla žlutá. Pak by součin jiného než žlutého čísla s jedničkou byl žlutý, což nelze (jiné než žluté číslo musí existovat, protože 4 a 9 mají různou barvu). Barvu jedničky označme c, barvu, která není žlutá a je různá od c, označme d. Čísla 2 a 3 dávají žlutý součin, mají proto buď stejnou barvu, nebo je jedno z nich žluté.

Pokud nemají stejnou barvu a žlutá je dvojka, má trojka barvu c (protože 3=1+2), barvu c mají i čísla 5=3+2, 7=5+2, 9=7+2. Číslo $10 = 2 \cdot 5$ je žluté. Kdyby mělo číslo 4 nebo 8 jinou barvu než žlutou, mělo by tuto barvu i číslo 6 resp. 10, což nelze.

Pokud 2 a 3 nemají stejnou barvu a žlutá je trojka, pak jsou pro jedničku a dvojku dvě možnosti: 2 má barvu c – pak 4=3+1, 5=3+2, 7=6+1, 8=6+2 i 10=3+7 mají barvu c. Devítka nemůže mít ani barvu c kvůli čtyřce, ani barvu d kvůli 1+9=10, proto musí být žlutá.

Číslo 2 má barvu d. Protože součin červeného a hnědého je červený, musí být c červená a d hnědá. Čísla 1, 4=3+1, 7=6+1, 10=6+4 jsou hnědá, 2, 5=3+2, 8=6+2 červená a 9=5+4 je žluté.

Zbývá možnost, kdy 2 a 3 mají stejnou barvu. Kdyby to byla žlutá, musela by mít trojka vzhledem k 3=2+1 barvu c, kdyby to byla barva d, musela by trojka být žlutá. V tomto případě tedy mají čísla 2,3 barvu c, tuto barvu mají i čísla 7=6+1, 8=6+2, 9=6+3. Číslo 4 musí mít barvu d nebo žlutou. Protože 7=4+3, nevyhoví d, protože 6=4+2, nevyhoví žlutá.

Úloha 4.6.

Matěj našel nejdelší posloupnost po sobě jdoucích čísel takovou, že každé lze zapsat jako součet čtverců dvou přirozených čísel. Když se to dozvěděla Liběnka, hned našla nejdelší posloupnost po sobě jdoucích čísel, která lze zapsat jako rozdíl čtverců. Která z posloupností byla delší?

Řešení. Po dělení čtyřmi dávají druhé mocniny pouze zbytky 0 a 1, součty druhých mocnin proto dávají pouze zbytky 0,1,2 a rozdíly druhých mocnin pouze zbytky -1,0,1. V obou případech může posloupnost obsahovat nejvýše tři prvky, čtvrtý by musel dávat onen zakázaný zbytek. Tříprvkovou posloupnost rozdílů druhých mocnin najdeme snadno: $7 = 4^2 - 3^2$, $8 = 3^2 - 1^2$, $9 = 5^2 - 4^2$. S tříprvkovou posloupností součtů druhých mocnin je to horší. Hledání nám urychlí fakt, že jeden ze součtů čtverců musí být dělitelný trojkou, a proto i devítkou, prostřední člen posloupnosti proto musí dávat zbytek 1,9, nebo 17 po dělení 36. Jedna z vyhovujících posloupností je proto například $72 = 6^2 + 6^2$, $73 = 8^2 + 3^2$, $74 = 7^2 + 5^2$.

Úloha 4.7.

Když se Henry dozvěděl, že vyšel další díl jeho oblíbené knihy Stopařův průvodce světem reálných funkcí*, rozhodl se, že si ho musí koupit. Hned na první straně narazil na následující úlohu:*

Najděte všechny funkce $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ (tj. takové, jež jsou definovány pouze pro kladná čísla a vracejí pouze kladné hodnoty), pro které platí

$$f(x + y) = f(y \cdot f(x)) \cdot f(x),$$

kde x, y jsou libovolná kladná reálná čísla.

Řešení. Pokud by bylo pro nějaké t, $f(t) > 1$, mohli bychom položit $x = t$, $y = \frac{t}{f(t)-1}$ a dosazením bychom měli

$$f\left(\frac{tf(t)}{f(t)-1}\right) = f\left(\frac{tf(t)}{f(t)-1}\right) \cdot f(t),$$

odtud $f(t) = 1$, což je spor. Proto pro všechna kladná x musí platit $f(x) \leq 1$.

Kdyby pro nějaké kladné u bylo $f(u) = 1$, dosazením za $x = u$ by bylo $f(y + u) = f(y)$ a díky tomu, že je f neklesající, musí být $f(y) = 1$ pro všechna kladná y. Tímto případem se nadále nebudeme zabývat a budeme předpokládat, že $f(x) < 1$ pro kladná x. Ze zadané rovnice pak $f(x + y) < f(x)$, hledaná funkce musí být klesající a proto prostá.

Nyní provedeme dvě různá dosazení – nejprve $x = 1$, $y = t$:

$$f(1)f(tf(1)) = f(1 + t)$$

a následně $x = tf(1), y = t + 1 - tf(1)$:

$$f(tf(1)) \cdot f((t + 1 - tf(1))f(tf(1))) = f(t + 1)$$

Porovnáním obou rovnic (po vydělení $f(tf(1))$) máme

$$f(1) = f((t + 1 - tf(1))f(tf(1)))$$

Z faktu, že funkce f je prostá, plyne

$$1 = (t + 1 - tf(1))f(tf(1)),$$

což pro $f(1) = a$ a $tf(1) = x$ dává

$$\frac{1}{\frac{x}{a} + 1 - x} = f(x).$$

Dosazením ověříme, že taková funkce vyhoví pro každé a.