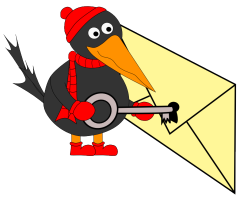
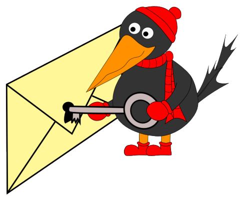


Řešení 3. série

Nerovnosti



Úloha 3.1.

Velice zajímavý je model vzdělávání v Lenošíně a Hloupětíně. Mají zde několik stupňů (pater) škol. Zajímavostí je, že všechny stupně škol bývají v jedné budově. Rozlišují školky, někdy označované zkratkou MŠ (Matematická školka), dále pak nižší školy, vyšší školy a vysoké školy (rozlišeno nejen podle úrovně probírané látky, ale i podle pater, ve kterých se vyučuje). Co je však pro lenošínské a hloupětínské školy typické je to, že si studenti mohou vybrat v jakém pořadí jednotlivé úrovně škol absolvují. Mohou tedy nejprve na vysokou školu a až posléze absolvovat školku. Abyste měli alespoň trochu přehled o úrovni školky, uveďme si jeden z příkladů, který zde studenti řešili:

Dokažte, že

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

Řešení. Položme $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100}$. Chceme ukázat, že $\frac{1}{15} < P < \frac{1}{10}$. Protože je P kladné, je umocnění ekvivalentní.Dokazujeme tedy $\frac{1}{225} < P^2 < \frac{1}{100}$. Přitom $P^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100}$. V následujících dvou odhadech využijeme toho, že funkce $f(x) = \frac{x-1}{x}$ je pro kladná x rostoucí.

Nejprve odhadneme P^2 shora takto: $P^2 < \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{100}{101} = \frac{1}{101}$, následně odhadneme P^2 zdola takto: $P^2 > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{99}{100} = \frac{1}{200}$,

Tím jsme dokázali obě požadované nerovnosti.

Úloha 3.2.

V minulosti si dokonce studenti mohli vybírat, který den do jaké třídy půjdou. Bohužel však docházelo k tomu, že si vždy vybírali třídy, kterým ten den něco odpadlo a tak tyto třídy praskaly ve švech a ostatní naopak zely prázdnotou. Ne že by se v nich neučilo. Mělo to samozřejmě i své výhody. V těchto třídách bylo nejméně zapomenutých domácích úkolů, nejméně prohřešků a dalo by se najít spousta dalších výhod. Bohužel však také spousta příkladů, které během hodiny byly zadány k promyšlení, rozmyšleno nebylo. Vniveč přišel i tento příklad:

Pro $a, b, c > 0$ dokažte

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Řešení. Existuje mnoho cest, jak tuto úlohu vyřešit. Nejjednodušší je vynásobit nerovnost výrazem abc (což lze vždy, neboť jde o součin tří kladných čísel a ten je kladný). Dostáváme tak nerovnost $a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ab$, která je po vynásobení dvěma Muirheadovou nerovností pro multiindexy $[4, 0, 0]$ a $[2, 1, 1]$.

Druhé řešení vede přes dvojí užití mincové nerovnosti. Nejprve ji použijeme pro trojice (a^3, b^3, c^3), $(\frac{1}{bc}, \frac{1}{ac}, \frac{1}{ab})$, následně pro (a^2, b^2, c^2), $(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a})$. Dostáváme tak

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ac} + \frac{c^3}{ab} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$$

BRKOS Team 2010

.

Úloha 3.3.

Také skladba předmětů na tamních školách nám určitě neunikne bez povšimnutí. Předměty jsou zde vyučovány bez výjimky ve spojitosti s matematikou. Například tuhle v matematické biologii se počítala závislost počtu obratlů bezobratlích na počtu obratlovců bez obratlů. Také se zde mimo jiné dokazovala tato nerovnost:

Najděte největší S takové, že pro kladná a, b, c, d platí nerovnost

$$\frac{a}{b+c+d}+\frac{b}{a+c+d}+\frac{c}{a+b+d}+\frac{d}{a+b+c}+$$
$$+\frac{b+c+d}{a}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{a+b+d+}{c}+\frac{a+b+c}{d}\geq S.$$

Řešení. Použitím nerovnosti $x+\frac{1}{x}\geq 2$, která platí pro $x>0$ a byla zmíněna v pomocném textu, získáme nerovnost $\frac{a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{a}\geq 2$. Cyklickou záměnou proměnných dostaneme podobnou nerovnost pro další tři dvojice výrazů, čímž dostáváme, že součet všech osmi zlomků je alespoň 8. Tato hodnota ale není dosažitelná – nemůže totiž nastat ve všech nerovnostech rovnost současně.

Budeme proto muset použít trik – tipneme si, že levá strana dané nerovnosti je minimální $a=b=c=d$. V takovém případě se levá strana rovná $4\cdot 3+4\cdot\frac{1}{3}=\frac{40}{3}$, proto $S\leq\frac{40}{3}$. Dílčí nerovnosti, které k důkazu použijeme, budeme volit tak, aby v nich rovnost nastávala pro $a=b=c=d$. Použijeme váženou verzi výše uvedené AG-nerovnosti:

$$\frac{a}{b+c+d}+k\frac{b+c+d}{a}\geq 2\sqrt{k}. \tag{3.1}$$

Aby zde nastávala rovnost, musí být $\frac{a}{b+c+d}=k\frac{b+c+d}{a}$, což po dosazení $a=b=c=d$ dává $k=\frac{1}{9}$. Abychom mohli tuto nerovnost použít, zlomky rozdělíme následujícím způsobem

$$\left(\frac{a}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{9a}\right)+\left(\frac{b}{a+c+d}+\frac{a+c+d}{b}\right)+\left(\frac{c}{a+b+d}+\frac{a+b+d}{c}\right)+$$
$$+\left(\frac{d}{a+b+c}+\frac{a+b+c}{9d}\right)+\frac{8}{9}\left(\frac{b+c+d}{a}+\frac{a+c+d}{b}+\frac{a+b+d+}{c}+\frac{a+b+c}{d}\right)\geq S.$$

Každou z prvních čtyř závorek můžeme zdola odhadnout pomocí (**??**) číslem $\frac{2}{3}$, poslední závorku můžeme rozepsat jako $(\frac{a}{b}+\frac{b}{a})+(\frac{a}{c}+\frac{c}{a})+\cdots+(\frac{c}{d}+\frac{d}{c})\geq 2+\cdots+2=12$. Dostáváme tak, že levá strana zadané nerovnosti je alespoň rovna $4\cdot\frac{2}{3}+\frac{8}{9}\cdot 12=\frac{40}{3}$. Tím jsme dokázali, že $S\geq\frac{40}{3}$, což spolu s dříve dokázanou nerovností dává $S=\frac{40}{3}$.

Úloha 3.4.

Převážnou většinu předmětů v Lenošíně pak tvořily různé formy lenošení, odpočinku či relaxace. Téměř do dokonalosti zde vyvinuli učení ve spánku. Jedním z takzvaných spánkopříkladů byl tento:

Nechť $a, b, c\geq 0$. Dokažte

$$\frac{abc}{a^3+b^3+c^3}+\frac{2}{3}\geq\frac{ab+ac+bc}{a^2+b^2+c^2}.$$

Řešení. Položme $p = abc$, $q = ab+bc+ac$, $r = a+b+c$. Pak platí $a^2+b^2+c^2 = r^2-2q$, $a^3 + b^3 + c^3 = r^3 - 3qr + 3p$. Rovnici přepíšeme do tvaru

$$\frac{p}{r^3 - 3qr + 3p} + \frac{2}{3} \geq \frac{q}{r^2 - 2q},$$

po roznásobení

$$3p(r^2 - 2q) + 2(r^2 - 2q)(r^3 - 3qr + 3p) \geq 3(r^3 - 3qr + 3p)q,$$
$$p(9r^2 - 27q) + 2(r^2 - 2q)(r^3 - 3qr) - 3qr^3 + 9q^2r \geq 0.$$

Na levou stranu se nyní budeme dívat jako na funkci proměnné p. Jde o lineární funkci, která je vždy monotónní, takže můžeme použít princip ABC.

Nejprve předpokládejme, že $abc = 0$, BÚNO $a = 0$. Po dosazení dokazujeme nerovnost $\frac{2}{3} \geq \frac{bc}{b^2+c^2}$, po roznásobení $2b^2 + 2c^2 \geq 3bc$, což lze přepsat na $2(b - c)^2 + bc \geq 0$, a to jistě platí.

Složitější je případ, kdy dvě proměnné nabývají stejnou hodnotu, konkrétně $a = b$.

$$\frac{a^2c}{2a^3 + c^3} + \frac{2}{3} \geq \frac{a^2 + 2ac}{2a^2 + c^2}.$$

Vynásobíme součinem jmenovatelů:

$$3(a^2c)(2a^2 + c^2) + 2(2a^2 + c^2)(2a^3 + c^3) \geq 3(a^2 + 2ac)(2a^3 + c^3)$$

Pro $c = 0$ je rovnost splněna. Pro ostatní c můžeme vzhledem k homogenitě předpokládat $c = 1$. Pak lze nerovnost roznásobením upravit do tvaru $2a^5 - 6a^4 + 4a^3 + 4a^2 - 6a + 2 \geq 0$. Polynom na levé straně má za kořen -1, navíc jsou všechny koeficienty sudé. Lze proto vytknout $2(a + 1)$:

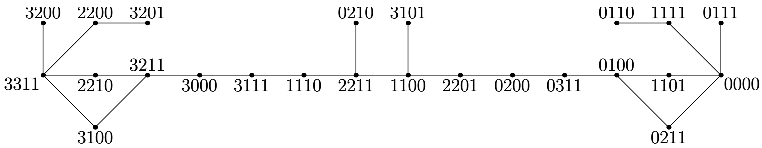
$$2(a + 1)(a^4 - 4a^3 + 6a^2 - 4a + 1) \geq 0.$$

V tomto zápise již nejpíš poznáváte čtvrtý řádek Pascalova trojúhelníka – lze proto nerovnost upravit do tvaru $2(a+1)(a-1)^4 \geq 0$. Výrazy $a+1$ i $(a-1)^4$ jsou nezáporné, všechny úpravy byly ekvivalentní, zadaná rovnost proto platí.

Úloha 3.5.

Když už opravdu není co dělat, sednou Kouma s Ňoumou k počítači a zahrají si spolu nějakou tu hru. Zrovna tuhle hráli hru, ve které potřebovali přepravit početnou armádu čítající tři humány, jednoho dospělého monkeje a dva malé monkeje přepravit z jedné strany řeky na druhou, přičemž měli k dispozici jeden člun, který uveze pouze dvě postavy. Navíc pouze dospělý monkej a humáni jsou schopni řídit člun. Pokud by však na některém z břehů bylo v jeden moment více monkejů než humánů, potom by monkejové humány pobili. Kolikrát nejméně musel jet člun z jedné strany řeky na druhou, aby se všichni dostali živí na druhý břeh?

Řešení. Abychom se vyhnuli dlouhému slovnímu popisu, popíšeme celou situaci grafem, tedy pomocí teček spojených čárami. Situaci, v níž je na prvním břehu h humánů, m monkeyů (z toho v velkých) a c člunů, popíšeme číslem znázorníme jako tečku s číslem $hmvc$. Dvě tečky spojíme čarou (hranou), pokud odpovídají takovým situacím, že z jedné do druhé se lze dostat pomocí jednoho přeplutí. Při tvorbě tohoto grafu začneme od tečky s číslem 3311, která odpovídá počátečnímu stavu. Uvážíme stavy, do kterých je možné se z něj dostat (a v nichž monkeyové nepobijí humány), nakreslíme jim odpovídající tečky, pak uvážíme stavy, do kterých se dá dostat z nově nakreslených atd. V okamžiku, kdy nemůžeme přikreslit žádnou tečku, je graf hotový. Pak je potřeba najít nejkratší cestu od 3311 k 0000. Jak snadno nahlédneme z obrázku, takové cesty jsou 4 a mají všechny délku 13 hran. Počet 13 přeplutí je proto nejen dostatečný, ale i minimální.



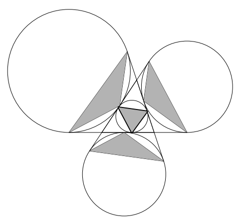
Úloha 3.6.

Liběnka dostala k svátku od Matěje knížku plnou matematických příkladů. Než ji však stačila otevřít, zabavil ji Henry a už nahlas četl první příklad:

Kolik existuje podmnožin množiny $1, \dots, 2009$ takových, že součet prvků podmnožiny dává zbytek 2010 po dělení 2048? Dokázali byste to také určit?

Řešení. Položme $D = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024\}$, $E = \{1, \dots, 2009\} \setminus D$. Každá množina $M \subseteq \{1, \dots, 2009\}$ je sjednocením množin $M \cap D$ a $M \cap E$. Množinu M tedy můžeme zkonstruovat následujícím způsobem: za množinu $M \cap E$ zvolíme libovolnou podmnožinu E (těch je 2^{1998}, neboť pro každý z 2009-11=1998 prvků E máme dvě možnosti: buď ho do množiny zařadíme, nebo ne). Řekněme, že součet prvků $M \cap E$ dává po dělení 2048 zbytek z. Je-li $z = 0$, musíme za $M \cap D$ zvolit prázdnou množinu (jiná podmnožina D nemá součet prvků dělitelný 2048, protože součet všech prvků D je pouze 2047). Pokud je $z > 0$, musíme za za $M \cap D$ podmnožinu D, jejíž součet je $2010 - z$ (z jednoznačnosti zápisu čísla $2010 - z$ ve dvojkové soustavě existuje právě jedna taková podmnožina). Pro každou možnou množinu $M \cap E$ jsme našli právě jednu množinu $M \cap D$ tak, aby M měla požadovanou vlastnost, hledaný počet množin je proto 2^{1998}.

Úloha 3.7.



Liběnka si dárek jen tak vzít nenechala. Jakmile Henry dočetl zadání prvního příkladu, knížku mu nesmlouvavě zabavila. Nenechala Matěje ani dopočítat Henrym zadaný příklad a diktovala mu nový. A tak Matěj opět trávil odpoledne matematikou:

Uvažme trojúhelník ABC, kružnici vepsanou ABC a všechny kružnice tomuto trojúhelníku připsané. Dokažte, že převrácená hodnota obsahu trojúhelníka ***s vrcholy v bodech dotyku vepsané kružnice trojúhelníka*** *ABC je rovna součtu převrácených hodnot obsahů trojúhelníků s vrcholy v bodech dotyku kružnic připsaných a přímek AB, BC a AC.*

Řešení. Dotykové body vepsané kružnice na stranách a, b, c označme po řadě D, E, F. Označme $|AE| = x$, $|BF| = y$, $|CD| = z$. Z mocnosti vrcholů ke kružnici vepsané pak také $|AF| = x$, $|BD| = y$, $|CE| = z$. Dále platí $a = y+z$, $b = x+z$ a $c = x+y$. Dotykové body kružnice připsané na straně BC na přímkách BC, AB a AC označme po řadě K, L, M. Z mocnosti bodů A, B, C k připsané kružnici máme postupně $|AL| = |AM|$, $|AB| + |BK| = |AB| + |BL| = |AL|$, $|AC| + |CK| = |AC| + |CM| = |AL|$. Sečtením druhých dvou rovnic $|AL|+|AM| = |AB|+|BK|+|CK|+|AC| = |AB|+|BC|+|CA|$, což spolu s první rovnicí dává $|AL| = |AM| = \frac{a+b+c}{2} = x+y+z$, proto $|BL| = |BK| = z$, $|CM| = |CK| = y$.

Obsah trojúhelníka určeného dotykovými body vepsané kružnice dostaneme odečtením obsahů tří malých trojúhelníků od obsahu $\triangle ABC$: $S = \frac{1}{2}((x+y)(x+z)\sin\alpha - x^2\sin\alpha - y^2\sin\beta - z^2\sin\gamma)$. Ze sinové věty $\sin\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{y+z}{2R}$, analogické vztahy platí pro ostatní úhly. Dosazením dostáváme

$$S = \frac{1}{4R}((x+y)(x+z)(y+z) - x^2(y+z) - y^2(x+z) - z^2(x+y)) = \frac{1}{2R}(xyz).$$

Obsah trojúhelníka určeného dotykovými body kružnice připsané straně BC získáme odečtením obsahu trojúhelníka ABC a dvou malých trojúhelníků od obsahu ALM:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}((x+y+z)^2\sin\alpha - (x+y)(x+z)\sin\alpha - z^2\sin\beta - y^2\sin\gamma), \\ &= \frac{1}{4R}((x+y+z)^2(y+z) - (x+y)(x+z)(y+z) - z^2(x+z) - y^2(x+y)) \\ &= \frac{1}{2R}(xyz + y^2z + yz^2) = \frac{1}{2R}yz(x+y+z). \end{aligned}$$

Protože je úloha symetrická, obsahy zbylých dvou trojúhelníků určených dotykovými body připsaných kružnic určíme jako

$$S_2 = \frac{1}{2R}xz(x+y+z)), \qquad S_3 = \frac{1}{2R}xy(x+y+z).$$

Dokazujeme proto rovnost

$$\frac{2R}{xyz} = \frac{2R}{yz(x+y+z)} + \frac{2R}{xz(x+y+z)} + \frac{2R}{xy(x+y+z)}.$$

Rovnici vydělíme $2R$ a zlomky na pravé straně rozšíříme po řadě x, y a z:

$$\frac{1}{xyz} = \frac{x}{x^2yz + xy^2z + xyz^2} + \frac{y}{xy^2z + x^2z + xz^2} + \frac{z}{xyz^2 + x^2yz + xy^2z}.$$

Sečtením zlomků na pravé straně a rozkladem jmenovatele na součin

$$\frac{1}{xyz} = \frac{(x+y+z)}{xyz(x+y+z)},$$

což je platná rovnost, neboť výrazy xyz i $x+y+z$ jsou nenulové. Všechny úpravy byly ekvivalentní, zadaná rovnost proto platí.

BRKOS Team 2010