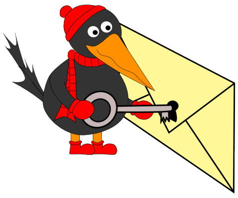
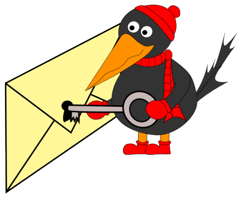


Řešení 2. série

PRVOČÍSLA



Úloha 2.1.

Zatímco se Hloupětín ekonomicky rozvíjel, Lenošín za ním jednoznačně zaostával. Lenošínští si uvědomili, že vydělávat čistě lenošením není to pravé ořechové. Obzvláště když Hloupětín zrekonstruoval za peníze utržené vyřešením jednoho záludného příkladu celé náměstí, bylo jasné, že právě Hloupětín se vydal tou správnou cestou. A jaký že byl ten záludný příklad? Podařilo se jim najít všechna přirozená čísla n taková, že $n^5 + n^4 + 1$ je prvočíslo.

Řešení. Pokusme se polynom $n^5 + n^4 + 1$ zapsat jako součin $p(n) \cdot q(n)$, kde p, q jsou polynomy s celočíselnými koeficienty. Pak pro taková n, že $p(n)$ i $q(n)$ jsou větší než 1, bude $n^5 + n^4 + 1$ číslo složené.

Mohli bychom p a q hledat ve tvaru $an + b$ a $cn^4 + dn^3 + en^2 + fn + g$, ale rychle bychom zjistili, že to nikam nevede. Zkusíme tedy tvar $an^2 + bn + c$ a $dn^3 + en^2 + fn + g$. Tyto polynomy vynásobíme a porovnáme koeficienty s kýženým součinem

$$
\begin{aligned}
ad &= 1\\
ae + bd &= 1\\
af + be + cd &= 0\\
ag + bf + ce &= 0\\
gb + fc &= 0\\
gc &= 1.
\end{aligned}
$$

Z poslední rovnice $g = c = 1$ (druhá celočíselná možnost by byla $g = c = -1$, ale pak by stačilo oba polynomy vynásobit -1). Z předposlední rovnice $b = -f$. Podobně z první rovnice $a = d = 1$ nebo $a = d = -1$, my se rozhodneme pro první možnost (stačí nám jedno řešení). Pak ze druhé rovnice $b = 1 - e$ a ze čtvrté $1 - b^2 + 1 - b = 0$. Řešení jsou $b_1 = 1$ a $b_2 = -2$. První vede po dopočítání ostatních neznámých na rozklad $(n^2+n+1)(n^3-n+1)$. Nerovnost $n^2+n+1 > 1$ platí pro všechna přirozená n, nerovnost $n^3 - n + 1 > 1$ jen pro $n > 1$. Víme tedy, že pro $n > 1$ zadaný výraz prvočíslem není. Jedninou možností je tak $n = 1$, dosazením ověříme, že opravdu dostáváme prvočíslo.

Úloha 2.2.

Lenošínským bylo jasné, že s touto situací musí něco dělat. A tak se pokusili také řešit příklady na zakázku. Tehdy to vzbudilo v obou městech velký povyk. Hloupětínští obviňovali lenošínské, že prachsprostě „obšlehli“ jejich systém. Lenošínští tvrdili, že se nechali pouze inspirovat. Ať to bylo tak, či onak, jejich první pokus skončil fiaskem. Nedokázali si totiž poradit hned s prvním příkladem:

Nechť $n = p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$, kde $p_1, \ldots, p_k$ jsou navzájem různá prvočísla a $e_1, \ldots, e_k$ jsou přirozená čísla. Určete, kolik existuje dvojic přirozených čísel takových, že jejich nejmenší společný násobek je n.

BRKOS Team 2009

Řešení. Čísla ve dvojici označme r a s. Je-li jedno z nich dělitelné prvočíslem p, je tímto prvočíslem dělitelný i jejich nejmenší společný násobek. Jediná prvočísla v rozkladech čísel r a s na prvočinitele jsou obsažena i v rozkladu čísla n. Lze proto psát $r = p_1^{f_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{f_k}$ a $s = p_1^{g_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{g_k}$. Z definice nejmenšího společného násobku plyne, že pro $i \in \{1, \ldots, k\}$ je $e_i = max\{f_i, g_i\}$. Aby toto platilo, musí být buď $f_i = e_i$ a $0 \leq g_i \leq e_i$ ($e_i + 1$ možností), nebo $g_i = e_i$ a $0 \leq f_i < e_i$ (e_i možností). Celkem máme tedy $2e_i + 1$ možností pro dvojici (f_i, g_i). Výběr dvojic $(f_1, g_1), \ldots, (f_k, g_k)$ můžeme provést nezávisle, pokaždé dostaneme jinou dvojici r a s (díky jednoznačnosti rozkladu). Proto dle pravidla součinu existuje $(2e_1 + 1) \cdot \cdots \cdot (2e_k + 1)$ takových dvojic.

Úloha 2.3.

Protože příklad nevyřešili, sklopili hlavu a běželi s příkladem za hloupětínskými. Ti si s ním samozřejmě hravě poradili. A to byl první náznak vzájemné spolupráce. Hloupětínští totiž nestíhali vymýšlet příklady do svých kaucí a lenošínští naopak při lenošení kromě lelkování neměli co na práci, a tak začali vymýšlet příklady. Nejprve spolupráce probíhala pouze po jednotlivých příkladech. Stejně tomu tak bylo i u příkladu:

Najděte všechna prvočíselná řešení rovnice $x^2 + y^3 = z^4$.

Řešení. Kdyby byla všechna tři prvočísla lichá, bylo by na levé staně sudé a na pravé straně liché číslo, což nelze. Kdyby bylo sudé z, bylo by $x^2 + y^3 = 16$ (2 je jediné sudé prvočíslo), pak ale $y^3 < 16$, čemuž vyhoví pouze $y = 2$, pak ale nenajdeme vyhovující x. Kdyby bylo sudé y, bylo by $x^2 + 8 = z^4$, což po odečtení x^2 a rozkladu na součin dává $8 = (z^2 + x)(z^2 - x)$. Pak $z^2 + x \leq 8$, což je možné pouze pro $z = 2$ a opět nedostáváme řešení.

Zbývá nám pouze možnost, že x je sudé. Máme tedy rovnici $4 + y^3 = z^4$, která po odečtení čtyřky a rozkladu na součin dává $y^3 = (z^2 - 2)(z^2 + 2)$. Protože je y prvočíslo a rozklad na součin je jednoznačný, mohou nastat dvě možnosti:

Buď $z^2 - 2 = 1$ a $z^2 + 2 = y^3$, nebo $z^2 - 2 = y$ a $z^2 + 2 = y^2$. V prvním případě máme odečtením $4 = y^3 - 1$, ve druhém $y^2 - y = 4$. Ani jedna z rovnic nevede na celočíselné y. Rovnice proto nemá prvočíselné řešení.

Úloha 2.4.

Posléze však došlo k tak úzké spolupráci, že i lenošínští začali výrazně prosperovat. A tímto způsobem šlape jejich ekonomika dodnes. Obě města tak zdárně prosperují. Zrovna nedávno vydělali společně balík peněz za tento příklad:

Řetězce $2, 3, 7, 13$ či $2, 5, 11, 23, 47$ jsou příklady řetězců prvočísel, ve kterých $p_i = 2p_i + 1$ nebo $p_i = 2p_i - 1$. Dokažte, že každý takový řetězec je konečný.

Řešení. Pokud řetězec obsahuje trojku, může po ní následovat pouze $7, 13$ nebo $5, 11, 23, 47$. Nejdelší řetězec obsahující trojku je proto $2, 3, 5, 11, 23, 47$. Snadno nahlédneme, že je to současně nejdelší řetězec obsahující dvojku. Dále řešme případy, kdy jsou prvočísla v řetězci větší než 3.

Pokud p_1 dává zbytek 1 po dělení třemi, je $2p_1 + 1$ třemi dělitelné, což nelze. Proto musí být $p_2 = 2p_1 - 1$. To dává opět zbytek 1 po dělení třemi, takže máme $p_3 = 2p_2 - 1$. Opakovaným použitím této úvahy dostáváme, že všechna p_i dávají zbytek 1 po dělení 3 a že pro $i \in \mathbb{N}$ je $p_{i+1} = 2p_i + 1$. Dále se dá vyslovit hypotéza, že $p_i = 2^{i-1}(p_1 - 1) + 1$, kterou snadno ověříme indukcí (pro $i = 1$ to platí a indukční krok plyne ze vztahu $p_{i+1} = 2p_i + 1$). S využitím Malé Fermatovy věty

$$p_{p_1} = 2^{p_1-1}(p_1 - 1) + 1 \equiv 1 \cdot (p_1 - 1) + 1 \equiv 0 \pmod{p_1}.$$

Máme tedy $p_1 | p_{p_1}$ a přitom $p_1 < p_{p_1}$, proto p_{p_1} není prvočíslo.

Analogicky pokud p_1 dává zbytek 2 po dělení třemi, je $p_{i+1} = 2p_i + 1$ a $p_i = 2^{i-1}(p_1 + 1) - 1$. Odtud opět $p_1 | p_{p_1}$. Pokud řetězec začíná prvočíslem $p_1 > 3$, může obsahovat nejvýše $p_1 - 1$ prvočísel a je proto konečný.

Úloha 2.5.

Když Matěj s Čudlou usínali spolu ve stanu na své první společné dovolené, povídali si, co se jim ten den líbilo a co nelíbilo. Oba se, což snad nikoho ani nepřekvapí, shodli, že nejvíce se jim na uplynulém dni líbila rovnice, ve které měli určit všechna reálná čísla x taková, že $\sqrt{[-7x^2 + 3x + 4]} = [2 - \sin x]$, kde $[a]$ značí celou část čísla a.

Řešení. Aby byla odmocnina na levé straně definovaná, musí být

$$0 \leq -7x^2 + 3x + 4 = -7(x - 1)(x + \frac{4}{7}),$$

proto $x \in \langle -\frac{4}{7}, 1\rangle$. Rozlišme nyní dva případy:

a) $x \in \langle -\frac{4}{7}, 0\rangle$. Pak $\sin x \in (-1, 0\rangle$ a $[2 - \sin x] = 2$. Umocněním zadané rovnosti pak $[-7x^2 + 3x + 4] = 4$. To nastane pro $4 \leq -7x^2 + 3x + 4 < 5$. Pravá část nerovnosti platí vždy, protože polynom $-7x^2 + 3x + (4 - 5)$ má záporný diskriminant. Levou část lze po odečtení čtyřky přepsat na $0 \leq -x(7x - 3)$. To je splněno na intervalu $\langle 0, \frac{3}{7}\rangle$. Na intervalu $\langle -\frac{4}{7}, 0\rangle$ je proto jediným řešením $x = 0$.

b) $x \in (0, 1\rangle$. Pak $\sin x \in (0, 1)$ a $[2 - \sin x] = 1$. Rovnost $[-7x^2 + 3x + 4] = 1$ nastane, právě když $1 \leq -7x^2 + 3x + 4 < 2$. Nerovnost $1 \leq -7x^2 + 3x + 4$ platí na intervalu $I_1 = \langle \frac{3-\sqrt{93}}{14}, \frac{3+\sqrt{93}}{14}\rangle$, nerovnost $-7x^2 + 3x + 4 < 2$ všude mimo interval $I_2 = \langle \frac{3-\sqrt{65}}{14}, \frac{3+\sqrt{65}}{14}\rangle$. Na intervalu $(0, 1\rangle$ je řešením $(0, 1\rangle \cap (I_1 \setminus I_2) = (\frac{3+\sqrt{65}}{14}, \frac{3+\sqrt{93}}{14}\rangle$.

Řešením rovnice je množina $\{0\} \cup (\frac{3+\sqrt{65}}{14}, \frac{3+\sqrt{93}}{14}\rangle$.

Úloha 2.6.

Kouma Ňoumálek chtěl překvapit Ňoumu Koumálka nějakým zákeřným příkladem. Stále však nemohl na nic přijít, až jednou ho napadlo:

Tětivou pohybujeme po obvodu půlkruhu určeného průměrem d. Dokažte, že trojúhelník tvořený středem tětivy a kolmými průměty krajních bodů tětivy na průměr d je rovnoramenný a že všechny trojúhelníky vzniklé pohybem tětivy jsou podobné.

Řešení. Střed kružnice označme S, krajní body tětivy A, B, jejich kolmé průměty po řadě C, D a střed úsečky AB nazveme P. Protože $|SA| = |SB|$, je SAB rovnoramenný, hodnotu $|\angle ASB| = |\angle SAB|$ označme α. Úhly SPB a SDB jsou pravé, čtyřúhelník

$SDBP$ má součet dvou protějších úhlů 180° a je proto tětivový[1]. Na kružnici opsané tomuto čtyřúhelníku odpovídají úhly SBP a SDP stejné tětivě a podle věty o obvodových úhlech jsou oba rovny α.

Analogickou úvahou pro čtyřúhelník $CSPA$, který je rovněž tětivový, dostaneme $|\angle SCP| = \alpha$. Trojúhelník CDP má u dvou vrcholů úhel α, je proto podobný rovnoramennému trojúhelníku SAB, který pohybem tětivy rotuje (a má tedy stále stejný tvar). Proto jsou trojúhelníky vzniklé pohybem tětivy rovnoramenné a vzájemně podobné.

Úloha 2.7.

Liběnka si nechala jednoho letního večera povídat od Henryho o tom, jaké to bylo, když ještě nebyla téměř žádná výpočetní technika. Henry barvitě vyprávěl a uvedl, že dokonce bez užití výpočetní techniky dokázali určit celou část čísla

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{10000}}.$$

Povedlo by se vám to také?

Řešení. Dokažme nejprve pro $k > 0$ nerovnost $2\sqrt{k+1} - 2\sqrt{k} < \frac{1}{\sqrt{k}}$. Po vynásobení $\frac{1}{2}\sqrt{k}$ máme $\sqrt{k(k+1)} - k < \frac{1}{2}$, po přičtení k a umocnění na druhou $k(k+1) < k^2 + k + \frac{1}{4}$, což je platná nerovnost. Provedené úpravy byly ekvivalentní, proto je platná i původní nerovnost.

Dále dokažme, že $\frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k} - 2\sqrt{k-1}$. Po vynásobení $\frac{1}{2}\sqrt{k}$ máme $\frac{1}{2} < k - \sqrt{k(k-1)}$, po přičtení $\sqrt{k(k-1)} - \frac{1}{2}$ a umocnění na druhou $k(k-1) < k^2 - k + \frac{1}{4}$, čímž je nerovnost dokázána.

Zadaný součet tedy můžeme odhadnout zdola výrazem

$$2(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \cdots + 2(\sqrt{10001} - \sqrt{10000}) = 2\sqrt{10001} - 2\sqrt{1},$$

což je o něco více než $2\sqrt{10000} - 2 = 198$, a shora výrazem

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + 2(\sqrt{4} - \sqrt{2}) + \cdots + 2(\sqrt{10000} - \sqrt{9999}) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{10000} - 2\sqrt{2},$$

což je vzhledem k nerovnostem $\frac{\sqrt{2}}{2} < 0,75$ a $\sqrt{2} > 1,4$ méně než $198,95$.

Hledaná celá část je proto 198.

[1] Tvrzení, že ve čtyřúhelníku mají protější úhly součet 180° právě tehdy, když je tětivový, lze použít bez důkazu. Je možné ho dokázat pomocí věty o obvodových úhlech.