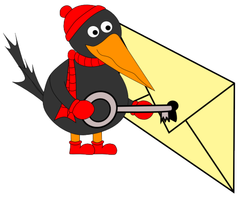
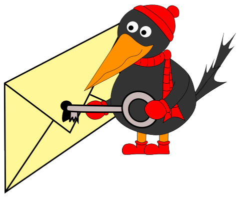


Řešení 1. série

Šachovnice



Úloha 1.1.

Když ještě za dávných časů byly Hloupětín a Lenošín jedno souměstí, sešli se radní, aby dohodli, jakým směrem se bude ubírat ekonomika tohoto města. A právě toto shromáždění se datuje jako první krok k osamostatnění Lenošína (jak říkají lenošínští, hloupětínští naopak tvrdí, že se osamostatnil Hloupětín). Tehdy totiž lenošínští navrhovali, že konurbace bude vydělávat lenošením. Hloupětínští oproti tomu chtěli vydělávat prodejem zajímavých příkladů, případně řešením zaslaných příkladů. Ačkoliv oba návrhy možného přísunu financí do městské pokladny byly jistě dírou v trhu, dohodnout se nedokázali. Z této schůze pochází také úloha uvedená jako jeden z příkladů k prodeji, kterou zde nadhodil praprapraděd prapraprađěda Henryho Klevra:

Šachovnice je klasicky obarvena. V jednom tahu změníme barvy všech políček v jednom sloupci nebo v jednom řádku. Může na konci zůstat pouze jedno políčko černé?

Co myslíte, koupil by tento příklad někdo?

Řešení. Řekněme, že v i-tém tahu měníme barvy v řádku nebo sloupci, který obsahuje c_i černých polí. Tento sloupec obsahuje $8 - c_i$ bílých polí, proto pokud byl před i-tou změnou celkový počet černých polí C_i, bude jich po změně $C_i - c_i + (8 - c_i) = C_i + 8 - 2c_i$. Celkový počet černých polí byl na začátku 32 (sudé číslo) a i-tou změnou se mění o $8 - 2c_i$ (také sudé číslo), je proto stále sudý. Nemůže být proto nikdy roven jedné.

Úloha 1.2.

Hádka na zmiňovaném shromáždění přerostla v bouřlivé pouliční nepokoje. Lenošínští na jedné straně ulice leželi na lenoškách, hloupětínští na druhé straně ulice seděli a řešili příklady. Jedna z těchto úloh se nám z té hrůzostrašné chvíle dochovala:

Na šachovnici je označených 16 polí tak, že v každém řádku i sloupci jsou označena dvě pole. Dokažte, že na označených 16 polí lze umístit 8 bílých a 8 černých figurek tak, aby v každém řádku a každém sloupci byla právě jedna bílá a právě jedna černá figurka.

Řešení. Pokud dvě označná pole leží ve stejném řádku (sloupci), řekneme o nich, že jsou *spřátelená řádkem (sloupcem)*. Začneme tak, že na libovolné označené pole umístíme bílou figurku. Na pole spřátelené řádkem s obsazeným polem postavíme černou figurku. Třetí figurkou (bílou) obsadíme pole spřátelené sloupcem s druhým obsazeným, čtvrtou (černou) na pole spřátelené se řádkem se třetím a tak dále. Tento algoritmus skončí v okamžiku, kdy bychom měli umístit další figurku na pozici, která je už obsazená. Je jisté, že tuto pozici jsme obsadili jako první (ostatní obsazené pozice mají obsazená obě spřátelená pole). Umisťovali jsme střídavě bílé a černé figurky a uvažovali spřátelení střídavě sloupcem a řádkem. Spřátelení mezi první a poslední figurkou je sloupcem, mezi poslední a předposlední řádkem, poslední figurka je proto černá. Platí tedy, že první figurka má na obou spřátelených polích figurky opačné barvy. Pro ostatní figurky platí totéž díky postupu, kterým jsme figurky přidávali.

BRKOS Team 2009

Nyní jsou dvě možnosti – buď jsme již umístili figurky na všechna označená pole, nebo ne. Pokud ne, vybereme libovolné neobsazené označené pole a celý algoritmus opakujeme. Opakovat ho budeme do doby, než budou obsazena všechna označená pole.

Úloha 1.3.

Demonstranti byli nakonec rozehnáni tmou a nočním chladem a jen zázrakem se tehdy nikdo nezranil. O to horší však byla dohra. O den později se opět sešla rada města, aby projednala možná řešení této krize. A tak bylo dne 15.6. v 17 hodin 32 minut 16 sekund bohužel neznámého roku za hlasitého lenošení na jedné straně a nepřeslechnutelného ohlodávání tužek na straně druhé rozhodnuto o oddělení obou částí souměstí. V Lenošíně toto oslavili převalením na druhý bok, v hloupětíně vyvěšením příkladu:

Do šachovnice $n \times n$ je vepsáno n^2 čísel tak, že jejich součet je nezáporný. Dokažte, že můžeme přemístit sloupce šachovnice tak, aby součet čísel na jedné z diagonál byl také nezáporný.

Řešení. Hodnotu v i-tém řádku a j-tém sloupci označme $a_{i,j}$. Uvažme nyní součty S_k, kde $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, definované takto: $S_0 = a_{1,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{n,n}$ a pro $k > 0$

$$S_k = a_{1,1+k} + a_{2,2+k} + \cdots + a_{n-k,n} + a_{n-k+1,1} + \cdots + a_{n,k}.$$

Každá z hodnot $a_{i,j}$ je započtena do právě jednoho součtu. Hodnota $S_0+S_1+\cdots+S_{n-1}$ je rovna součtu všech čísel na šachovnici a dle zadání je nezáporná. Proto musí být alespoň jeden ze součtů S_k nezáporný, nechť je to S_t. Přesunutím prvních t sloupců na pravý konec šachovnice docílíme toho, že prvky sčítané v součtu S_t budou ležet na diagonále. Přesunutí sloupců je proto vždy možné.

Úloha 1.4.

A tak se město Lenošín pokusilo vydělávat lenošením. Bezúspěšně. To naopak Hloupětínu se dařilo. Hned první příklad, který byl na aukci vydražen a přinesl do městské pokladny nemalý finanční obnos, zní:

Pole šachovnice 12×12 jsou obarvena jednou ze tří barev. Dokažte, že existuje pravoúhelník, jehož rohová políčka jsou stejné barvy.

A tak vznikla samostatná města Hloupětín a Lenošín.

Řešení. Polí na šachovnici je celkem 144, nejpočetnější barva (řekněme zelená) proto musí být na alespoň $\frac{144}{3} = 48$ polích. Počet zelených polí v i-tém řádku označme a_i. Dvojici zelených polí, které jsou ve stejném řádku, nazveme *duetem*. Počet různých duetů v i-tém řádku je $\frac{a_i(a_i-1)}{2}$. Celkový počet duetů je

$$D = \sum_{i=1}^{12} \frac{a_i(a_i-1)}{2} = \sum_{i=1}^{12} \frac{(a_i - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}}{2} = -\frac{3}{2} + \sum_{i=1}^{12} \frac{(a_i - \frac{1}{2})^2}{2}.$$

Aritmetický průměr čísel $a_1 - \frac{1}{2}, a_2 - \frac{1}{2}, \ldots, a_{12} - \frac{1}{2}$ je alespoň $\frac{48 - \frac{12}{2}}{12} = \frac{7}{2}$, jejich kvadratický průměr $Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{12} \frac{(a_i - \frac{1}{2})^2}{12}}$ je podle nerovnosti mezi aritmetickým a kvadratickým průměrem alespoň $\frac{7}{2}$, proto

$$D = -\frac{3}{2} + 6 \sum_{i=1}^{12} \frac{(a_i - \frac{1}{2})^2}{12} = -\frac{3}{2} + 6Q^2 \geq 6 \cdot \frac{49}{4} - \frac{3}{2} = 72.$$

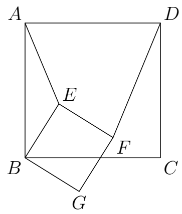
Máme pouze $\frac{12\cdot 11}{2} = 66$ dvojic sloupců, proto existují dva duety ležící ve stejné dvojici sloupců. Pole tvořící tyto duety určují čtyřúhelník se všemi rohy zelenými. Tím je zadané tvrzení dokázáno.

Úloha 1.5.

Kouma s Ňoumou napsali po obvodu kružnice čísla $1, 0, 1, 0, 0, 0$. *Poté v každém kroku přičítali k libovolným dvěma sousedním číslům totéž přirozené číslo. Mohli takto dostat všechna čísla stejná?*

Řešení. Čísla na kruhu označme po řadě $a_1, \ldots, a_6$ a uvažujme součet $S = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6$. Na začátku je $S = 2$. Pokud přičteme stejnou hodnotu ke dvěma sousedním číslům, hodnota S se nezmění. Kdyby byla všechna čísla stejná, muselo by být $S = 0$. Taková situace proto nastat nemůže.

Úloha 1.6.



Když Matěj s Liběnkou malovali svůj pokojík, složili si k tomu samozřejmě večerníkovské čepice. Složili je z různých čtvercových papírů. Po malování čepice opět rozložili a papíry hodili přes sebe právě tak, že vrchol jednoho čtverce splýval s vrcholem čtverce druhého. Tu Matěje napadlo, že pokud vrcholy čtverců označí tak, jak je na obrázku, a vzdálenost AE označí a a vzdálenost DF označí x, pak platí, že $x = a \cdot \sqrt{2}$. Podařilo by se vám to dokázat?

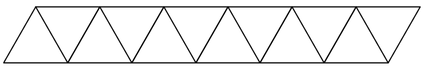
Řešení. Úsečka BD je úhlopříčkou čtverce $ABCD$, proto $|BD| : |AB| = \sqrt{2}$. Úsečka BF je úhlopříčkou čtverce $BGFE$, proto $|BF| : |BE| = \sqrt{2}$. Dále

$$|\angle FBD| = |\angle FBA| - |\angle DBA| = |\angle FBA| - 45^\circ = |\angle FBA| - |\angle FBE| = |\angle EBA|.$$

Trojúhelníky FBD a EBA jsou proto podobné podle *sus*. Koeficient jejich podobnosti je $|BF| : |BE| = \sqrt{2}$. Platí tedy $x : a = |DF| : |AE| = \sqrt{2}$, což jsme chtěli dokázat.

Úloha 1.7.

Henry Klevr si hrál s kosodelníkovým proužkem papíru tak, že ho překládal sem a tam, až vznikl pás sestávající se z dvanácti rovnostranných trojúhelníků. Každý z vrcholů obarvil žlutě nebo červeně. Přišli Matěj s Liběnkou a napadlo je, kolik existuje takových obarvení, aby žádný z rovnostranných trojúhelníků neměl všechny vrcholy stejné barvy? Dokázali byste to určit?



Řešení. Vrcholy trojúhelníků označíme zleva doprava $v_1, v_2, \ldots, v_{14}$. Označme c_n počet způsobů, jak obarvit vrcholy v_1 až v_n. Pokud je $n > 2$, může obarvení být dvou typů:

- Vrcholy v_n a v_{n-1} mají různou barvu. Taková obarvení získáme tak, že obarvíme $n-1$ vrcholů jedním z c_{n-1} způsobů a v_n obarvíme barvou, kterou jsme nepoužili na v_{n-1}. Takových obarvení je c_{n-1}.

- Vrcholy v_n a v_{n-1} mají stejnou barvu. Kvůli podmínce v zadání pak musí mít v_{n-2} jinou barvu než tyto dva vrcholy. Taková obarvení získáme tak, že obarvíme $n-2$ vrcholů jedním z c_{n-2} způsobů a vrcholy v_{n-1} a v_n obarvíme barvou, kterou jsme nepoužili na v_{n-2}. Takových obarvení je c_{n-2}.

Shrnutím předchozích dvou odrážek dostáváme, že pro $n > 2$ je $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$. To nám spolu s rovnostmi $c_1 = 2$ a $c_2 = 4$ zadává posloupnost $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ jednoznačně. Naší úlohou je spočítat, kolik je c_{14}. Toho lze dosáhnout určením prvních 14 členů posloupnosti: $2, 4, 6, 10, 16, 26, 42, 68, 110, 178, 288, 466, 754, 1220$. Je také možné si všimnout, že pokud f_i jsou Fibonacciho čísla (tj. pokud f_n splňujě $f_1 = f_2 = 1$ a $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ pro $n > 2$), pak $c_n = 2f_{n+1}$. Pro posloupnost f je znám vzorec, jímž lze f_n počítat bez znalosti předchozích členů:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Pomocí něj lze určit $c_{14} = 2f_{15} = 1220$.