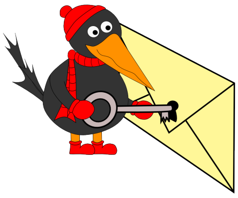
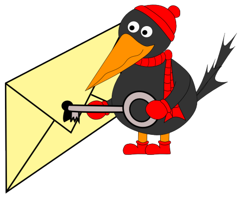


Zadání 6. série

Hrátky Koumy a Ňoumy



Úloha 6.1. *Kouma s Ňoumou si uspořádali Celonárodní mistrovství Lenošína s otevřeným vstupem pro Hloupětínské. Natiskli si pozvánky, nakoupili ceny, poháry pro vítěze i všechny zúčastněné, natiskli diplomy a pak se konečně zavřeli do pokoje a mistrovství začalo.*

První disciplínou bylo dělitelování. *Ňouma začal s číslem $n = 2$. V každém následujícím kroku získá jeden z hráčů číslo n tak, že k němu přičte vlastního dělitele[1] čísla n. Vyhraje ten, který první dostane číslo větší než 2009. Kdo vyhraje?*

Řešení. Ve svém prvním tahu Kouma přičte k Ňoumově dvojce jedničku. Ňouma tak dostane trojkou a může ji zvětšit pouze na čtyřku. Na Koumu tak zbude sudé číslo, přičtením jedničky z něj může udělat liché. Protože lichá čísla mají jen liché dělitele, musí Ňouma přičítat liché číslo a na Koumu tedy zbude opět číslo sudé. Může proto svou strategii zopakovat. V okamžiku, kdy na Koumu zbude sudé $n \geq 1340$, přičte k němu místo jedničky $\frac{n}{2}$, dostane $\frac{3n}{2} \geq 2010$ a vyhraje.

Proč nemůže Ňouma vyhrát dříve než Kouma? Předpokládejme, že Kouma hraje podle své strategie a přesto Ňouma vyhraje. Před Koumovým posledním tahem mělo n hodnotu $2k+1$. Číslo, které k němu Ňouma přičetl, mělo hodnotu $d = \frac{2k+1}{t}$, kde $t \in \mathbb{N}$, $t > 1$. Protože je $2k+1$ liché, je navíc $t > 2$, proto $d \leq \frac{2k+1}{3}$. Přitom $2k+1+d \geq 2009$, což dává $2k+1+\frac{2k+1}{3} \geq 2009$, po úpravě $2k+1 \geq 1507$. Kouma ve svém posledním tahu musel zvětšovat číslo $2k$ na $2k+1$, protože ale $2k \geq 1506$, dostáváme spor s tím, že hrál podle své strategie (podle té by přičetl k a vyhrál). Proto Ňouma vyhrát nemůže.

Úloha 6.2. *No hádejte, kdo vyhrál první disciplínu? No jasně. Druhá bitva vypukla na poli ryze černém a zbraní byla pouze křída. Ňouma, jenž opět začíná, s Koumou střídavě psali na tabuli přirozená čísla menší nebo rovna přirozenému číslu n, přičemž na tabuli nesměli napsat dělitele žádného čísla již na tabuli napsaného. Prohrál ten, kdo už nemohl napsat žádné číslo. Kdo vyhrál?*

Řešení. V této úloze použijeme argument kradení strategií z povídání. Předpokládejme, že Kouma má pro dané n vítěznou strategii. Ňouma v prvním tahu napíše jedničku, Kouma na to zareaguje tím, že napíše nějaké m. Přestože jsou na tabuli napsána dvě čísla, je situace stejná, jako kdyby bylo na tabuli pouze m. Podle předpokladu by v takové situaci Kouma vyhrál. Když ale jeho strategii ukradne Ňouma, skončí hra Ňoumovým vítězstvím a to je spor. Kouma proto nemůže mít vítěznou strategii.

Protože v každém tahu ubude alespoň jedno číslo z množiny čísel, která je možno napsat, hra musí skončit výhrou některého z hráčů. Vítěznou strategii má proto Ňouma.

[1] Vlastní dělitel čísla n je každý dělitel menší než n (včetně jedničky).

Na závěr bychom rádi upozornili na to, že sice víme, kdo vyhraje, ale nejsme schopni jeho strategii nějak obecně popsat. Zadaná hra se dost podobá hře Chomp (`http://en.wikipedia.org/wiki/Chomp`), pro kterou se hledají vítězné strategie už od poloviny dvacátého století.

Úloha 6.3. *Další disciplínou byl* Čokoládový výslech.
Kouma si myslí přirozené číslo od 1 *do* 16. *Ňoumovi slíbil čokoládu, pokud ho uhádne. Ňouma se smí Koumy n-krát zeptat, jestli číslo patří do nějaké množiny. Kouma mu musí vždy odpovědět, může ale jednou lhát. Když po n-té odpovědi Ňouma číslo uhádne, vyhrál. Pro jaká n je jisté, že Ňouma vyhraje?*

Řešení. Nejprve ukažme, že Ňoumovi stačí sedm otázek. Kdyby Kouma nemohl lhát, stačí Ňoumovi 4 otázky. Ty mají totiž 16 různých možných kombinací odpovědí, což mu stačí k rozlišení čísel. Může si například udělat tabulku o čtyřech řádcích a šestnácti sloupcích a do každého řádku zapsat jinou kombinaci odpovědí. První otázku pak položí tak, aby odpověď byla „Ano" právě u těch čísel, které mají v prvním řádku tabulky „Ano". Vhodná čtveřice dotazovaných množin by proto mohla být například

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1,2,3,4,5,6,7,8\},\\ A_2 &= \{1,2,3,4,9,10,11,12\},\\ A_3 &= \{1,2,5,6,9,10,13,14\},\\ A_4 &= \{1,3,5,7,9,11,13,15\}. \end{aligned}$$

Což můžeme přehledněji vyjádřit tabulkou následovně:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A_1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓								
A_2	✓	✓	✓	✓					✓	✓	✓	✓				
A_3	✓	✓			✓	✓			✓	✓			✓	✓		
A_4	✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓		✓	

Ňouma se nejdříve zeptá na tyto množiny.

Pro každou množinu X definujme $\overline{X} = \{1,2,\ldots,16\} \setminus X$. Pro každé $i \in \{1,2,3,4\}$ položme $B_i = A_i$, pokud byla Koumova odpověď na i-tou otázku kladná a $B_i = \overline{A_i}$ v opačném případě. Pokud by Kouma na první čtyři otázky odpověděl pravdu, leželo by hledné číslo v průniku $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4$. V páté otázce se Ňouma zeptá, jestli je hledané číslo v $B_1 \cap B_2 \cap B_3$, v šesté na $B_2 \cap B_3 \cap B_4$ a v sedmé na $B_1 \cap B_4$. Kdyby odpověď na jednu z prvních čtyř otázek byla nepravdivá, projevilo by se to dvěma zápornými odpověďmi na poslední tři otázky. Z toho, jaké dvě jsou nepravdivé, lze snadno určit, která odpověď byla nepravdivá, zaměnit příslušne B_i za $\overline{B_i}$ a hledané číslo najít pomocí průniku. Naopak pokud by první čtyři byly pravdivé, nejvýše jedna z posledních třech odpovědí bude záporná.

Nyní pro spor předpokládejme, že Ňoumovi stačí šest otázek. Řekněme, že se Kouma předem rozhodne, jaké číslo si bude myslet a při kolikáté otázce lhát (případně že nebude lhát vůbec). Takových rozhodnutí může udělat $16 \cdot 7 = 112$. Každému takovému rozhodnutí pak odpovídá nějaká posloupnost odpovědí na Ňoumovy otázky. Možných šestic odpovědí je ale pouze 64, nějaká z nich odpovídá alespoň dvěma různým rozhodnutím. Dvě rozhodnutí, pro která odpovědi splynou, se nemohou lišit pouze pozicí lži (pak by se na této pozici musely lišit posloupnosti odpovědí). Ňouma tedy nemůže po šesti otázkách s jistotou poznat, jaké číslo si Kouma myslí.

Úloha 6.4. *Poslední dvě klání proběhla v* polynomování. *Medaile se rozdávaly v celočíselném polynomování i reálném polynomování. Nejprve tedy spolu soupeřili Ňouma (začínající hráč) s Koumou v celočíselném boji.*

a) *Střídavě doplňovali celočíselné koeficienty normovaného polynomu* $x^3 + \ldots x^2 + \ldots x + \ldots$. *Dokažte, že Ňouma může hrát vždy tak, aby polynom měl pouze celočíselné kořeny.*

O něco tužší souboj se uskutečnil na poli reálném:

b) *Ňouma s Koumou opět střídavě doplňovali koeficienty polynomu* $x^{10} + \ldots x^2 + \ldots x + 1$, *tentokrát však již mohli být tyto koeficienty libovolné reálné. Pokud polynom nebude mít žádné reálné kořeny, vyhraje Ňouma. Dokažte, že Kouma může vyhrát, ať už udělá Ňouma cokoliv.*

Řešení.

a) Jedna z vítězných strategií pro Ňoumu je taková, že před x doplní koeficient (-1). Když Kouma někam doplní koeficient a, doplní Ňouma na zbylou pozici $(-a)$. Když budeme BÚNO předpokládat, že Kouma doplnil konstantní člen, bude výsledný polynom roven $x^3 - ax^2 - x + a = (x^2 - 1)(x - a) = (x - 1)(x + 1)(x - a)$ a Ňouma vyhraje.

b) V chybném zadání mohli Ňouma s Koumou doplňovat jen dva koeficienty. Vítězná strategie pro Koumu pak byla triviální: zvolil si libovolné x a koeficient, který na něj zbyl, dopočítal tak, aby hodnota polynomu byla rovna 0. To vždy lze, protože lineární rovnice s nenulovým koeficientem u lineárního členu má vždy řešení.

Řešme ale úlohu tak, jak byla myšlena, tedy s možností doplnit všechny koeficienty u x^9 až x^1.

Polynom, který vznikne během hry po doplnění i koeficientů, označme P_i (nedoplněné koeficienty považujeme za nuly).

Protože má P_9 konstantní člen 1, je $P_9(0) = 1$. Když Kouma zajistí, aby pro nějaké reálné číslo a platilo $P_9(a) < 0$, musí mezi 0 a a graf polynomu P_9 protnout osu x a P_9 má proto kořen (plyne ze spojitosti polynomiální funkce), čehož chce Kouma dosáhnout. Kouma se bude snažit Ňoumu donutit k tomu, aby svým posledním tahem doplnil koeficient u liché mocniny – kdyby Ňouma končil doplněním dostatečně vysokého koeficientu u sudé mocniny, mohl by snadno dosáhnout toho, že $P(x) > 0$ pro všechna x. Ve svých prvních třech tazích bude proto Kouma doplňovat koeficienty pokud možno k sudým mocninám. Alespoň jeden z koeficientů, které zůstanou před Koumovým posledním tahem nedoplněny, je u liché mocniny.

Pokud je druhý scházející koeficient u sudé mocniny, doplní Kouma k sudé mocnině koeficient $(-1 - \max\{P_7(1), P_7(-1)\})$. Platí proto

$$P_8(1) = P_7(1) - 1 - \max\{P_7(1), P_7(-1)\} \leq P_7(1) - 1 - P_7(1) = -1 < 0,$$

analogicky $P_8(-1) < 0$. Protože Ňouma doplňuje koeficient k liché mocnině, nastane nejvýše jedna z nerovností $P_9(1) > P_8(1)$ a $P_9(-1) > P_8(-1)$. Proto buď $P_9(1) < 0$ nebo $P_9(-1) < 0$.

Nyní předpokládejme, že nedoplněné koeficienty jsou u n-té a m-té mocniny, kde $m < n$ jsou lichá čísla. Ukážeme, že Koumovi stačí doplnit vhodný koeficient a_n, aby vyhrál nezávisle na Ňoumově volbě koeficientu a_m. Z rovností

$$P_9(1) = P_8(1) + a_m$$
$$P_9(-2) = P_8(-2) - a_m 2^m$$

plyne rovnost

$$2^m P_9(1) + P_9(-2) = 2^m P_8(1) + P_8(-2).$$

Odtud je již patrné, že pokud se Koumovi podaří dosáhnout nerovnosti

$$2^m P_8(1) + P_8(-2) < 0,$$

musí být alespoň jeden sčítanec na levé straně záporný, proto $P(1) < 0$ nebo $P(-2) < 0$ a Kouma vyhraje. Protože

$$\begin{aligned} 2^m P_8(1) + P_8(-2) &= 2^m P_7(1) + 2^m a_n + P_7(-2) - 2^n a_n = \\ &= (2^m P_7(1) + P_7(-2)) - (2^n - 2^m) a_n, \end{aligned}$$

stačí Koumovi volit $a_n > \frac{2^m P_7(1) + P_7(-2)}{2^n - 2^m}$.

Úloha 6.5. *Matěj s Bublou se vydali na noční procházku a ruku v ruce pozorovali hvězdy na jasné jarní noční obloze. V tuto romantickou chvíli dodal této kouzelné atmosféře pověstnou třešničku Matěj, když láskyplně pošeptal Buble do ouška: „Vidím na obloze n hvězd (obloha je prostorová) a určitě žádné 4 hvězdy neleží v jedné rovině. Některé z nich spojíme k úsečkami. Lásko má, zvládla bys dokázat, že pokud těmito úsečkami není vytvořený trojúhelník s vrcholy v některé z hvězd, potom k je menší nebo rovno dolní celé části ze čtvrtiny druhé mocniny čísla n?“ No uznejte, není Matěj úžasný?*

Řešení. Pro usnadnění popisu přidělíme každé hvězdě barvu a číslo. Barvení a číslování budeme provádět v krocích. V i-tém kroku vždy zjistíme, zda jsou na obloze dvě neobarvené vzájemně spojené hvězdy a pokud ano, obarvíme jednu modře, druhou zeleně a oběma přiřadíme číslo i. Pokud takové dvě hvězdy neexistují, vybereme libovolnou ze zbývajících hvězd, obarvíme ji žlutě a dáme jí číslo i. Na konci obarvování pak bude m modrých, m zelených a $n - 2m$ žlutých hvězd. Pokud například budou na obloze hvězdy α, β, γ a spojené budou α s β a α s γ, můžeme obarvit α modře, β zeleně a γ bude žluté, hvězdy α a β budou mít obě číslo 1 a γ číslo 2.

Z každé žluté hvězdy vede spojnice pro každé $i = 1, \ldots, m$ jen do jedné ze dvou hvězd s tímto číslem. Do hvězd s číslem vyšším než m z ní spojnice vést nemohou (žádné dvě žluté hvězdy nejsou spojené). Spojnic končících ve žluté hvězdě je proto nejvýše $m(2n-m)$. Spojnice, které v žádné žluté hvězdě nekončí, mohou spojovat buď modrou a zelenou hvězdu se stejným číslem (takových je m), nebo dvě hvězdy s různými čísly. Pro pevně zvolená $i, j \leq n$, kde $i \neq j$, mohou existovat pouze dvě spojnice hvězd s čísly i a j (třetí spojnice by spolu se spojnicí hvězd se stejným číslem vytvořila trojúhelník). Dvojici i, j můžeme vybrat $\frac{m(m-1)}{2}$ způsoby (i vybereme m způsoby, j vybereme $m-1$ způsoby a každá možnost tak bude započtena dvakrát). Pro všechny možné kombinace i, j tedy máme celkem $2\frac{m(m-1)}{2} = m(m-1)$ spojnic.

Když sečteme počty spojnic všech tří typů dostaneme

$$m(n-2m) + m + m(m-1) = mn - m^2 = \frac{n^2}{4} - \left(m^2 - mn + \frac{n^2}{4}\right) = \frac{n^2}{4} - \left(m - \frac{n}{2}\right)^2.$$

Protože hodnota druhé mocniny je vždy nezáporná, je tento počet vždy nejvýše $\frac{n^2}{4}$. Protože počet je vždy celé číslo, lze jej shora odhadnout výrazem $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, což jsme chtěli dokázat.

Úloha 6.6. *Bubla, celá rozechvělá, chtěla Matěje také potěšit a pošeptala mu: „Čtveřice hvězd leží v rovině a tvoří čtverec $ABCD$, jemuž je vepsaný rovnostranný osmiúhelník $O_1O_2 \ldots O_8$ (tedy takový, že pro i od 1 do 7 platí $|O_iO_{i+1}| = |O_8O_1|$). Některé jeho strany navíc leží na straně čtverce a to tak, že úsečka O_1O_2 leží na AB, O_3O_4 na BC, O_5O_6 na CD a O_7O_8 na DA. Matěji, uměl bys dokázat, že existuje čtverec, na kterém leží zbylé strany osmiúhelníka?“*

Řešení. Délku strany osmiúhelníka označme a. Dále položme

$$\begin{aligned} |AO_1| &= x_1, & |AO_8| &= y_1,\\ |BO_3| &= x_2, & |BO_2| &= y_2,\\ |CO_5| &= x_3, & |CO_4| &= y_3,\\ |DO_7| &= x_4, & |DO_6| &= y_4. \end{aligned}$$

Protože strany osmiúhelníka ležící na stranách čtverce mají délku a, máme $|AB| - a = x_1 + y_2 = x_2 + y_3 = x_3 + y_4 = x_4 + y_1$. Protože mají délku a i zbylé strany osmiúhelníka, máme z Pythagorovy věty $x_i^2 + y_i^2 = a^2$ pro $1 \leq i \leq 4$.

Předpokládejme, že x_1 je maximum ze všech x_i. Protože součet druhých mocnin x_i a y_i je konstantní, znamená to, že y_1 je minimum ze všech y_i. Máme ale rovnost $x_1 + y_2 = x_4 + y_1$, která je s podmínkami $x_1 \geq x_4$, $y_2 \leq y_1$ slučitelná jen tehdy, když $x_1 = x_4$ a $y_2 = y_1$. Proto i x_4 je rovno minimu ze všech x_i. Když podobnou úvahu zopakujeme ještě dvakrát, zjistíme, že i x_3 a x_2 jsou rovny tomuto minimu. Trojúhelníky AO_1O_8, BO_3O_2, CO_5O_4 a DO_7O_6 jsou proto shodné. Osmiúhelník $O_1O_2...O_8$ je proto souměrný vůči otočení o 90° kolem středu čtverce. Čtyřúhelník omezený přímkami O_8O_1, O_2O_3, O_4O5 a O_6O_7 je proto také souměrný vzhledem k tomuto otočení. Aby mohl být tento čtyřúhelník souměrný vůči otočení o 90°, musí to být čtverec, což jsme chtěli dokázat.

BRKOS Team 2008

Úloha 6.7. *Zatímco Matěj s Bublou prožívali nádherné romantické chvilky pod hvězdami, trápila se Liběnka s jedním příkladem. A nemohla a nemohla ho vyřešit. No, schválně, dokázali byste to vy? Posloupnost a_n je definována jako $\sum_{d|n} a_d = 2^n$. Dokažte, že $n \mid a_n$.*

Řešení. Dosazením $n = 1$ dostaneme $a_1 = 2^1 = 2$, pro $n = 1$ tvrzení platí. Dále se zabývejme pouze čísly $n > 1$.

Pro spor předpokládejme, že tvrzení pro nějaká n neplatí a m je nejmenší z nich. Protože $m \nmid a_m$, existuje prvočíslo p takové, že se v rozkladu m na prvočinitele vyskytuje v mocnině e a v rozkladu a_m pouze v nějaké nižší (i nulté) mocnině.

Lze psát $m = p^e t$, kde t je přirozené číslo nesoudělné s p. Množinu dělitelů m označme A, množinu dělitelů čísla $p^{e-1}t$ označme B a množinu čísel tvaru $p^e k$, kde $k \mid m$, označme C. Nyní ukážeme, že $A = B \cup C$. To, že všechna čísla z B a C leží v A, je zřejmé. Pokud je x číslo z A a má v rozkladu u p exponent nižší než e, pak leží v B. Pokud má exponent roven e, leží v C. Proto všechny prvky z A v $B \cup C$. Navíc žádný prvek z C nemůže ležet v B, proto jsou B a C disjunktní.

Když využijeme definičního vztahu posloupnosti k výpočtu sum a_i přes A a B, dostaneme

$$2^m = \sum_{i \in A} a_i = \sum_{i \in B} a_i + \sum_{i \in C} a_i = 2^{p^{e-1}t} + \sum_{i \in C} a_i.$$

Když ze sumy napravo vyčleníme a_m a rovnici drobně upravíme, dostneme

$$a_m = 2^m - 2^{p^{e-1}t} - \sum_{i \in C \setminus \{m\}} a_i \tag{6.1}$$

Do výrazu $V = 2^m - 2^{p^{e-1}t}$ dosadíme za $m = p^e t$ a vytkneme $2^{p^{e-1}t}$:

$$V = 2^{p^{e-1}t}\left(2^{p^e t - p^{e-1}t} - 1\right) = 2^{p^{e-1}t}\left(\left(2^t\right)^{p^e - p^{e-1}} - 1\right) = 2^{p^{e-1}t}\left(\left(2^t\right)^{(p-1)p^{e-1}} - 1\right)$$

Je-li p liché prvočíslo, je podle Eulerovy věty hodnota závorky dělitelná p^e, takže $p^e \mid V$. Je-li $p = 2$ a $e > 1$, je $p^{e-1}t \geq pt \geq p$ a $p^e \mid V$. Pro $p = 2$ a $e = 1$ je $p^{e-1}t \geq 1$, tedy opět $p^e \mid V$.

Protože předpoládáme, že $p^e \nmid a_m$ a $a_m = V - \sum_{i \in C \setminus \{m\}} a_i$, musí alespoň jeden člen a_j sumy $\sum_{i \in C \setminus \{m\}} a_i$ dávat nenulový zbytek po dělení p^e. Protože ale j dělitelné p^e je, máme $j \nmid a_j$, což je spor s tím, že m je minimální číslo s vlastností $m \nmid a_m$.