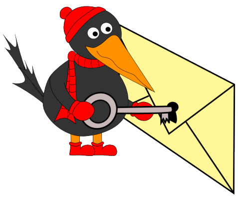
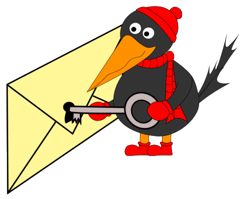


Vzorové řešení 5. série
Geomtrie



Úloha 5.1. *Kouma s Ňoumou pořádali mravenčí závody. Dali k sobě dvě krabičky od sirek tak, že svíraly ostrý úhel. Uvnitř úhlu vytvořeného stěnami krabiček je start závodu. Ze startu musí vyrazit mravenci přímo ke stěně první krabičky, dotknout se ji pravou prostřední nožičkou, odtud běžet ke stěně druhé krabičky, dotknout se levou prostřední nožičkou a běžet zpátky na start, kde je zároveň i cíl. Kudy má běžet Koumův mravenec, aby ho bolely co nejméně nožičky (tedy aby urazil co nejmenší vzdálenost)?*

Řešení. Přímky, na nichž leží stěny krabiček, od kterých se mravenci odráží, označme p a q, body odrazů nazvěme P a Q. Bod, z něhož mravenci startují, označíme S. Sestrojíme obrazy S' a S'' bodu S v osových souměrnostech podle p a q. Z vlastností osové souměrnosti pak plyne, že $|S'P| = |SP|$ a $|S''Q| = |SQ|$. Délka celé trasy mravence je proto $|SP| + |PQ| + |SQ| = |S'P| + |PQ| + |S''Q|$. To je délka lomené čáry $S'PQS''$. Protože nejkratší spojnice dvou bodů je úsečka, je délka této trasy nejméně rovna $|S'S''|$. Této délky lze dosáhnout právě tehdy, když body S', P, Q a S'' leží na jedné přímce.

Nejkratší dráhu urazí mravenec tehdy, pokud si oba body odrazu zvolí na spojnici $S'S''$.

Úloha 5.2. *Matěj Klevr pozval na rande sličnou slečnu Bublu Čudlovou. Liběnka se rozhodla, že si ji musí prověřit, a při první příležitosti jí položila otázku: „Bublo, co bys mohla říci o přímkách a, b, pokud platí, že složíme-li osovou symetrii podle přímky a s osovou symetrií podle přímky b a osovou symetrii podle přímky a, dostaneme totéž zobrazení, jako bychom složili osovou souměrnost podle přímky b s osovou souměrností podle přímky a a s osovou symetrií podle přímky b? Jaký úhel svírají přímky a a b?“*

Řešení. Zadání si můžeme přepsat jako rovnost zobrazení:

$$O_a \circ (O_b \circ O_a) = O_b \circ (O_a \circ O_b).$$

Když zobrazení na obou stranách složíme s O_b, dostaneme

$$(O_b \circ O_a) \circ (O_b \circ O_a) = O_a \circ O_b.$$

Na pravé straně se nám dvě zobrazení O_b vzájemně vyrušila (osová souměrnost složená sama se sebou je identita). Nyní obě strany rovnosti složíme s O_a:

$$O_a \circ (O_b \circ O_a) \circ (O_b \circ O_a) = O_b,$$

a nakonec s O_b:

$$(O_b \circ O_a) \circ (O_b \circ O_a) \circ (O_b \circ O_a) = id.$$

Když tedy zobrazení $O_b \circ O_a$ složíme třikrát samo se sebou, dostaneme identitu. Jak jsme uvedli v povídání, složení dvou osových souměrností je buď posunutí, nebo otočení.

Kdyby bylo $O_b \circ O_a$ posunutím o vektor $\vec{v}$, muselo by posunutí o $3\vec{v}$ být identita, proto $\vec{v} = \vec{0}$. To nastane v případě, že jsou přímky a a b totožné.

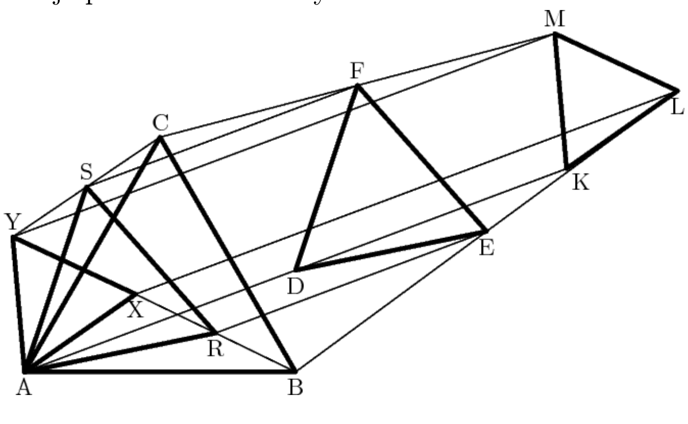
Kdyby bylo $O_b \circ O_a$ otočení o úhel α, muselo by otočení o 3α být identita, proto $\alpha \in \{0°, 120°, 240°\}$. První možnost vede opět na $a = b$, ve zbylých případech svírají přímky a a b úhel 60°.

Úloha 5.3. *„Neruš mé trojúhelníky!“, ozvalo se Koumovo zahřmění směrem k Ňoumovi. Kouma měl nakreslené dva rovnostranné trojúhelníky ABC a KLM (se shodnou orientací) s odlišnou délkou stran. A Ňouma chodil a vymýšlel ptákoviny. Kouma už to nemohl vydržet a povídá mu: „Kdybys radši přestal blbnout a místo toho dokázal, že středy stran AK, BL a CM tvoří také rovnostranný trojúhelník.“*

Řešení. Středy AK, BL a CM označme po řadě D, E, F.

Uvažme trojúhelník AXY, který vznikne z KLM posunutím o $\overrightarrow{KA}$. Dále označme R střed úsečky BX a S střed úsečky CY. Protože C je otočením B okolo A o úhel 60° a Y je otočením X okolo A o 60°, je i střed úsečky CY otočením středu BX o 60°, proto $|\angle RAS| = 60°$ a $|AR| = |AS|$. Z toho je patrné, že trojúhelník ARS je rovnoramenný s vnitřním úhlem 60° u vrcholu A.

Protože je ER střední příčka v trojúhelníku LXB, je $\overrightarrow{RE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{XL}$. Bod X je obrazem bodu L v posunutí o $\overrightarrow{KA}$, proto $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{XL}$, takže $\overrightarrow{RE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$. Analogicky $\overrightarrow{SF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$. Protože i $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$, je DEF posunutý trojúhelník ARS o $\frac{1}{2}\overrightarrow{AK}$ a je proto rovnostranný.



Úloha 5.4. *Bublu Čudlovou otázka na osovou souměrnost vůbec nezaskočila a po chvíli přemýšlení přišla na správné řešení. Liběnku to překvapilo. Aby toho nebylo málo, tak ji hned vzápětí srazila do kolen otázka, zda by dokázala určit, na co se zobrazí přímka v zobrazení f, které je bijekcí roviny na sebe a ve kterém se zobrazí libovolná kružnice opět na kružnici.*

Řešení. Zvolme dva různé body A, B a jejich obrazy označme A', B'. Na přímce $A'B'$ zvolme libovolný bod $C' \notin \{A', B'\}$ a hledejme jeho vzor C.

Kdyby bod C ležel mimo přímku AB, určovaly by body A, B a C kružnici k. Ta by se v f zobrazila na kružnici k' a na k' by musely ležet body A', B' a C'. Přímka $A'B'$ by musela mít s touto kružnicí tři průsečíky, což nelze. Na každý bod přímky $A'B'$ se proto zobrazí nějaký bod AB.

Nyní na AB zvolme bod D a hledejme jeho obraz D'. Předpokládejme, že by neležel na přímce $A'B'$. Bodem D' vedeme rovnoběžku p' s přímkou $A'B'$

Uvažme libovolný bod X' neležící na p'. Přímka $X'D'$ protne $A'B'$ v Y'. Obraz Y bodu Y' leží na AB. Vzorem přímky $D'Y'$ je část přímky $DY = AB$. Vzor X bodu X' je proto na přímce AB. Všechny body mimo p' mají proto vzor na AB, všechny body na p' mají vzor na nějaké přímce p (jak jsme ukázali výše, vzorem přímky je přímka). Zobrazení inverzní k f proto zobrazí celou rovinu na $AB \cup p$, což je spor s tím, že je f bijekce. Proto bod D' leží na $A'B'$.

Ukázali jsme, že všechny body AB se zobrazí na $A'B'$ a celou ji pokryjí, proto f zobrazí přímku vždy na přímku.

Úloha 5.5. *Poté, co ani na popáté nevyhráli Kouma s Ňoumou ve sportce, rozhodli se, že si pro sebe vymyslí hazardní hru se zaručenou výhrou. Nazvali ji Šťastných $2n+1$. Z přirozených čísel 1 až $2n+1$ se losuje $2n+1$ čísel tak, že žádné číslo nemůže být vylosováno dvakrát. Vyhraje ten, který uhodne všech $2n+1$ tažených čísel. Kouma hned v první hře překvapivě vyhrál hlavní cenu i s prémií. Když už tuto hru hráli poněkolikáté, všiml si Ňouma zajímavé skutečnosti, totiž že součin všech rozdílů taženého čísla a pořadí, ve kterém bylo číslo taženo, byl po každé hře dělitelný dvěma. Je to jen náhoda?*

Řešení. Mezi čísly od 1 do $2n+1$ je $n+1$ lichých čísel a n sudých. Nejvýše n z $n+1$ lichých čísel proto může mít sudé pořadí, alespoň jedno liché číslo l je vylosováno v lichém pořadí p. V součinu je tedy jeden činitel $(l-p)$, který je sudý. Proto je sudý i celý součin.

Úloha 5.6. *Když Matěj zjistil, jak zkoušela Liběnka jeho lásku, byl tak naštvaný, že by se to s trochou nadsázky (a to nepřeháním) již dalo nazvati příliš naštvaný. Aby si ho Liběnka udobřila, vymyslela mu příklad. Měl dokázat, že rovnice*

$$\left(x+y\sqrt{5}\right)^4+\left(z+t\sqrt{5}\right)^4=2+\sqrt{5}$$

nemá řešení pro žádná racionální čísla x,y,z,t. Matěj samozřejmě takovou omluvu přijal...

Řešení. Nejprve obě čtvrté mocniny rozepíšeme z binomické věty:

$$x^4+z^4+4\sqrt{5}(x^3y+z^3t)+30(x^2y^2+z^2t^2)+20\sqrt{5}(xy^3+zt^3)+25(y^4+t^4)=2+\sqrt{5}.$$

Po úpravě

$$x^4+z^4+30(x^2y^2+z^2t^2)+25(y^4+t^4)-2=$$
$$=\sqrt{5}\left[1-4(x^3y+z^3t)-20\sqrt{5}(xy^3+zt^3)\right].$$

Kdyby byla hodnota hranaté závorky na pravé straně nenulová, mohli bychom touto hodnotou rovnici vydělit, na levé straně by zbylo nějaké racionální číslo a na pravé straně $\sqrt{5}$, což je číslo iracionální. Proto jsou obě strany rovnice nulové, pravou stranu proto můžeme vynásobit číslem -1. Dostaneme

$$x^4 + z^4 + 30(x^2y^2 + z^2t^2) + 25(y^4 + t^4) - 2 = \\ = (-\sqrt{5})\left[1 - 4(x^3y + z^3t) - 20\sqrt{5}(xy^3 + zt^3)\right],$$

zpětným provedením úprav

$$x^4+z^4-4\sqrt{5}(x^3y+z^3t)+30(x^2y^2+z^2t^2)-20\sqrt{5}(xy^3+zt^3)+25(y^4+t^4) = 2+\sqrt{5},$$

zpětným užitím binomické věty

$$\left(x - y\sqrt{5}\right)^4 + \left(x - y\sqrt{5}\right)^4 = 2 - \sqrt{5}.$$

Na pravé straně máme součet dvou čtvrtých mocnin, tedy nezáporné číslo. Protože je $\sqrt{5} > 2$, je na pravé straně číslo záporné, rovnost tedy pro žádnou čtveřici racionálních čísel nenastane.

Úloha 5.7. *Roman Tyčka Bubla a Matěj vyrazili společně do kina. V Lenošíně promítají před vlastním filmem (místo ukázek, co bude již brzy ve vašem kině) zadání příkladů, aby si matematici, které zrovna nebaví film vybraný jejich partnerkami, kino také náležitě užili. A tak před filmem, na který vyrazili naši kamarádi, běžel tento příklad:*

„Nechť a, b jsou kořeny kvadratické rovnice $x^2 + px - 1 = 0$, kde p je liché celé číslo. Nechť $z_n = a^n + b^n$. Dokažte, že z_n a z_{n+1} jsou nesoudělná celá čísla pro všechna přirozená čísla n.“

Řešení. Využijeme identitu $z_{n+2} = a^{n+2} + b^{n+2} = (a^{n+1} + b^{n+1})(a + b) - ab(a^n + b^n) = (a + b)z_{n+1} - abz_n$. Dosazením z Viètových vztahů $a + b = -p$ a $ab = -1$ dostaneme

$$z_{n+2} = -pz_{n+1} + z_n.$$

Protože navíc $z_1 = a + b = -p$ a $z_2 = a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab = p^2 + 2$, vidíme, že všechna z_n jsou celá čísla.

Pro spor předpokládejme, že posloupnost z_n obsahuje dva po sobě jdoucí členy z_i a z_{i+1} soudělné a že i je nejmenší index s takovou vlastností. Čísla $-p$ a p^2+2 jsou nesoudělná (jejich společný dělitel musí dělit $p^2+2+p\cdot(-p) = 2$ a současně liché p, proto jím musí být číslo 1). Proto je index i alespoň 2. Řekněme, že q je prvočíslo, které dělí z_i a z_{i+1}. Pak dle vztahu $z_{i-1} = -pz_i + z_{i-1}$ číslo q dělí i z_{i-1}, takže čísla z_{i-1} a z_i jsou soudělná číslem q, což je spor s předpokladem, že je index i minimální.