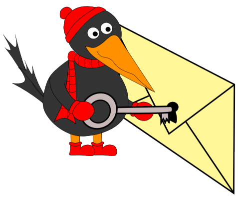
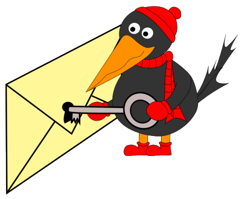
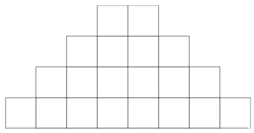


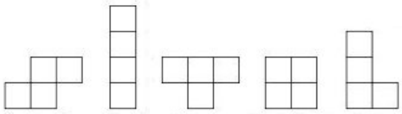
Vzorové řešení 4. série
Tetromina



Úloha 4.1.

To jednoho dne vlezli Matěj s Liběnkou doma na půdu a našli tam krabičku s pěti tetrominy – od každého typu jeden (obrázky dole). Našli tam i spoustu předloh k pokrytí. Nad předlohou, kterou můžete vidět na obrázku vpravo, se však trápili hodně dlouhou dobu. Podařilo by se vám tuto pyramidu pokrýt dílky tetromina? Jednotlivé dílky můžete otáčet a překlápět.





Řešení.

K tomu, abychom dokázali, že pyramidu pokrýt nelze, nám stačí rozebrat několik možných poloh O tetromina a I tetromina.

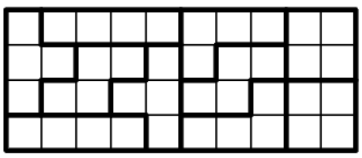
Elegantnější však je použít obarvení. Když pyramidu obarvíme šachovnicovým způsobem, bude obsahovat deset černých a deset bílých buněk. Každé z tetromin S, I, L a O zakryje vždy dvě černá a dvě bílá políčka. Na T-tetromino tak zbudou dvě černá a dvě bílá. Je ale zřejmé, že T-teromino musí pokrývat buď tři, nebo jedno bílé políčko. Pyramidu proto nelze pokrýt.

Úloha 4.2.

No hádejte, komu se jako prvnímu podařilo rozluštit pokrytí pyramidy. Ano, Liběnce. A posmívala se Matějovi: „Ty jsi ale matěj Matěji, takový jednoduchý příklad.“ Matěj se urazil a ukazujíce na dílky tetromina odeskl Liběnce: „Když jsi tak chytrá, tak schválně, jestli vyřešíš tento úkol. Pokud bychom na půdě našli n sad tetromina stejných, jako to naše, pro jaká přirozená čísla n se ti podaří pokrýt obdélník $4 \times 5n$ buněk všemi dílky tetromina?“ A Liběnka opět mohla dílky otáčet i převracet.

Řešení.

Obdélník 4×10 pokrýt umíme (viz obrázek). Umíme proto pokrýt i libovolný obdélník $4 \times 10k$, takže pro sudá n je pokrytí možné.



Pro lichá $n = 2k + 1$ obarvíme obdélník jako šachovnici a předpokládáme, že ji umíme danými tetrominy pokrýt. Každé T-tetromino pokryje buď tři černé a jednu bílou buňku (počet takových T-tetromin označme a), nebo naopak (takových je $n-a$). Celkový počet černých buněk zakrytých T-tetrominy je $3a+(n-a)=2a+n=2(a+k)+1$, což je liché číslo. Protože ostatní tetromina (S, I, L i O) pokryjí každé dvě černá pole, pokrývají všechna tetromina lichý počet černých polí. Obdélník, který má 4 řádky a $5n$ sloupců a je obarvený šachovnicově, má v každém sloupci dvě černá pole, celkově tedy sudý počet. Pro liché n tudíž nelze obdélník pokrýt.

Úloha 4.3.

To by nebyl Henry, aby se nepodíval, co jeho děti řeší za příklady. A když viděl, že jsou na sebe Matěj s Liběnkou „nasoptění", musel zasáhnout, jinak by se snad skutečně poprali. A jak asi Henry zasáhnul? No ano, svoji klasickou a proslavenou henryovkou. Ta už urovnala tolik sporů... A jaký že to byl příklad tentokrát? Dal Matějovi a Liběnce určit a samozřejmě také dokázat, kolik nejméně buněk obdélníku o rozměrech $m\times n$ musíme vybarvit, aby na neobarvená pole nešel položit žádný dílek L-tetromina.

Řešení.

Pro obdélníky $1\times n$ a $m\times 1$ není potřeba vybarvit žádnou buňku. Snadno zjistíme, že k tomu, aby na neobarvená pole obdélníka 3×2 nešlo položit L-tetromino, musí být alespoň dvě jeho pole vybarvená. Obdobně každý čtverec 3×3 musí mít vybarvená 3 pole. Pro obdélník o dvou řádcích a $3t+z$ sloupcích, kde $t\in\mathbb{Z}$ a $z\in\{0,1,2\}$, stačí obarvit třetí, šestý, ..., $3t$-tý sloupec. Obarveno tak bude $2t$ buněk. Protože část takového obdélníku lze pokrýt t obdélníky 2×3 a v každém z nich je potřeba obarvit alespoň 2 buňky, je toto obarvení optimální.

Dále se zabývejme jen netriviálními případy, kdy $m,n>2$. Pomocí čtverců 3×3 a obdélníků 3×2 lze pokrýt libovolný pás $3\times u$, kde $u\geq 2$. Takovými pásy lze pokrýt libovolný obdélník $3v\times u$. Protože v každém z dílčích čtverců i obdélníků musí být vybarvena třetina polí, musí být vybarvena třetina polí i v obdélníku $3v\times u$.

V případě obdélníků, u nichž není ani jeden rozměr dělitelný třemi, je situace složitější. Položme $m=3k+t$, $n=3l+u$, kde $k,l\in\mathbb{N}$, $t,u\in\{4,5\}$ (to můžeme, protože $m,n>3$). Obdélník $m\times n$ pak lze rozdělit na obdélníky $3k\times n$, $t\times 3l$ a $t\times u$. V prvních dvou obdélnících musí být dle předchozího odstavce vybarveno alespoň $kn+tl$ polí. Pro obdélník $t\times u$ musíme rozlišit tři možnosti:

- $t=u=4$: Předpokládejme, že ve čtverci 4×4 stačí vybarvit 4 pole. Protože vrchní tři řádky tvoří obdélník 4×3 a v něm musí být 4 vybarvená pole, nesmí být žádné vybarvené pole v posledním řádku. Obdobně nesmí být žádné vybarvené pole v posledním sloupci. Pak ale lze umístit do čtverce L-tetromino tak, které má všechny své buňky v posledním řádku nebo posledním sloupci. Proto je potřeba vybarvit alespoň 5 polí.
- $t=u=5$: část čtverce 5×5 lze pokrýt čtyřmi obdélníky 2×3, v každém musí být dvě vybarvená pole. Ve čtverci 5×5 je potřeba obarvit 8 polí.

- $t = 5$, $u = 4$ nebo naopak: část obdélníka 5×4 lze pokrýt třemi obdélníky 2×3, v každém musí být dvě vybarvená pole. V obdélníku 4×5 je potřeba obarvit 6 polí.

Ve všech třech případech platí, že k obarvení obdélníka $t\times u$ je potřeba obarvit alespoň $\left\lfloor \frac{t\cdot u}{3} \right\rfloor$ buněk.[1] V celém obdélníku $m \times n$ jich je potřeba obarvit

$$kn + tl + \left\lfloor \frac{tu}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3kn + 3tl + tu}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3kn + tn}{3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{mn}{3} \right\rfloor .$$

Pro $m, n > 2$ tedy máme dolní odhad. Že je současně horním odhadem dokážeme tak, že najdeme obarvení, které mu vyhovuje. Buňky obdélníka rozdělíme podle toho, jaký zbytek dává součet jejich souřadnic po dělení třemi. Dostaneme tak tři skupiny buněk, nejmenší z nich má nejvýše $\left\lfloor \frac{mn}{3} \right\rfloor$ prvků. Buňky z této skupiny obarvíme. Protože L-tetromino obsahuje obdélník 3×1, při jakémkoliv umístění do obdélníka zakrývá z každé skupiny buněk alespoň jednu. Protože jsme jednu skupinu celou obarvili, není možné L-tetromino do obdélníka umístit.

Pro obdélníky $1 \times n$ a $m \times 1$ není potřeba vybarvit žádné buňky. Pro obdélníky $2\times r$ a $r\times2$ je potřeba vybarvit $2\left\lfloor \frac{r}{3} \right\rfloor$ buněk. Pro ostatní obdélníky je potřeba obarvit $\left\lfloor \frac{mn}{3} \right\rfloor$ buněk.

Úloha 4.4.

Když se pak Henry spokojeně uvelebil na kanapi, vzpomněl si ještě na jeden příklad. Ale když viděl, jak se Matěj s Liběnkou namáhají s počítáním předchozího příkladu, řekl si, že je přeci nemůže rušit. A tak si jen zamručel pod vousy: „Jestli pak by dokázali určit, kolika způsoby můžeme pokrýt obdélník $2\times2n$ buněk dílky O-tetromino a L-teromino?“

Řešení.

Počet způsobů, jak takový obdélník pokrýt, označme f_n. Obdélník orientujeme tak, aby jeho výška byla 2 a šířka $2n$. Je potřeba si uvědomit, že pro $n > 2$ lze každé pokrytí vyrobit jedním ze tří způsobů:

- Levý krajní sloupec obdélníka je pokryt O-tetrominem. Tím je pak pokryt i druhý nejlevější sloupec. Zbylých $2(n-1)$ sloupců lze pokrýt f_{n-1} způsoby.

- Levý krajní sloupec je pokryt L-tetrominem, které pokrývá další dvě buňky v horním řádku. Buňky pod nimi pak musí být pokryty dalším L-tetrominem, jehož umístění je jednoznačné. Zbylých $2(n-2)$ sloupců lze pokrýt f_{n-2} způsoby.

- Levý krajní sloupec je pokryt L-tetrominem, které pokrývá dvě další buňky v dolním řádku. Stejně jako v minulém případě je pak f_{n-2} možností, jak pokrytí dokončit.

[1] Nechť x je reálné číslo. Potom $\lfloor x \rfloor$ je největší celé číslo menší nebo rovno x (tzv. dolní celá část čísla x).

Shrnutím těchto třech možností dostáváme pro $n > 2$ vztah

$$f_n = f_{n-1} + 2f_{n-2}. \tag{4.1}$$

Navíc snadno ověříme, že

$$f_1 = 1 \text{ a } f_2 = 3. \tag{4.2}$$

To nám stačí k tomu, abychom našli několik prvních hodnot f_n: 1, 3, 5, 11, 21, 43,..., všimli si, že $f_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$ a dokázali to indukcí. Jako bázový krok nám poslouží rovnosti (4.2), v indukčním kroku stačí do rovnosti (4.1) dosadit za f_{n-1} a f_{n-2} z indukčního předpokladu.

Existuje ale i sofistikovanější přístup. Nejprve budeme ignorovat druhou podmínku a budeme hledat posloupnosti f_n, které vyhovují podmínce (4.1) a jsou tvaru $g_n = k \cdot a^n$ pro nějaké reálné konstanty k, a. Dosazením tohoto tvaru do rovnosti dostáváme $ka^n = ka^{n-1} + ka^{n-2}$, což po převedení na jednu stranu a vytknutí ka^{n-2} dává

$$k \cdot a^{n-2}(a^2 - a - 2) = 0.$$

Hodnota závorky je nulová pro $a = -1$ a $a = 2$, posloupnosti $k \cdot (-1)^n$ a $k \cdot 2^n$ proto vyhovují. Nyní využijeme důležité pozorování: když dvě posloupnosti splňují rovnost (4.1), splňuje ji i jejich součet. Naší podmínce tedy vyhovují všechny posloupnosti tvaru

$$f_n = k \cdot 2^n + l \cdot (-1)^n.$$

Aby taková posloupnost splňovala (4.2), musí být $k = \frac{2}{3}$ a $l = \frac{1}{3}$. Protože posloupnost

$$f_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n$$

splňuje podmínky (4.1) a (4.2), které posloupnost jednoznačně určují, je hledanou posloupností.

Úloha 4.5.

Ňouma přišel za Koumou se zajímavým příkladem. Totiž, měl dané dva polynomy $f(x) = 4x^2 - 4x + 4$ a $g(x) = 2x^2 + x$. Pomocí sčítání, odečítání a násobení těchto polynomů měl získat polynom $h(x) = x$ (dělit polynomy nemohl!). Ňouma si zatím sedl k počítači a brouzdal po netu a co chvíli zavolal: „Tak co, Koumo, už jsi to vykoumal?“

Řešení.

Všimněme si, že $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3$, $g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$. Protože hodnota v bodě $\frac{1}{2}$ je u obou polynomů celočíselná, bude celočíselná i pro jakýkoliv polynom, který vznikne jejich násobením, sčítáním či odčítáním.

Pro zadaný polynom ale platí $h\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Takový polynom Kouma získat nemůže.

BRKOS Team 2008

Úloha 4.6.

Po chvilce se volání od počítače ozývalo po delších a delších intervalech. Koumovi se to zdálo podezřelé a tak se šel podívat, cože to Ňouma dělá. Zjistil, že Ňouma narazil na tento příklad:

Přirozená čísla jsou obarvena světle zelenou a tmavě zelenou barvou, přičemž součet různobarevných čísel je vždy světle zelený a jejich součin je tmavě zelený. Jaký je součin dvou tmavě zelených čísel?

Kouma se příkladu pousmál: „No jo, Ňoumo, komu se nelení, tomu se zelení...“

Řešení.

Pro úplnost je potřeba na začátku rozebrat dva triviální případy. Pokud by všechna čísla byla světle zelená, nemá smysl bavit se o součinu dvou tmavých čísel. Pokud by byla všechna čísla tmavě zelená, potom součin dvou tmavě zelených čísel bude zřejmě také tmavě zelený. Nyní již vzhůru na případy zajímavější.

Kdyby bylo číslo 1 tmavě zelené a číslo i světle zelené, měl by podle zadání součin $1 \cdot i = i$ být tmavě zelený, což je spor. Proto je číslo 1 světle zelené.

Řekněme, že a, b jsou tmavě zelená čísla. Pak $a + 1$ je součet tmavě a světle zeleného čísla, tedy číslo světle zelené. Kdyby bylo ab světle zelené, bylo by $ab + b$ součtem světlého a tmavého, bylo by světle zelené. Protože ale $ab + b = (a + 1)b$ je součin různobarevných čísel, je to číslo tmavě zelené, což je spor.

Součin dvou tmavě zelených čísel musí být tmavě zelený.

Úloha 4.7.

Matěj s Liběnkou na střídačku říkali kladná reálná čísla. Když je pak všechny sečetli, zjistili, že výsledek je 3. Matěje napadlo, že by mohli sečíst i jejich druhé mocniny. Když už byli na čísle o něco větším než jedna, přestalo je to bavit a vyrazili raději na lyžovajdu. Zvládli byste dokázat, že mezi čísly vyřčenými Matějem a Liběnkou by se našly tři taková, jejichž součet je větší než jedna?

Řešení.

Čísla, která děti řekly, seřadíme do nerostoucí posloupnosti

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots a_n.$$

Položme $s = a_1 + a_2 + a_3$ a pokusme se ze zadané nerovnosti $1 \leq a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$ získat dolní odhad pro s. Protože jsou a_i uspořádaná sestupně, platí

$$1 < a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 \leq a_1^2 + a_2^2 + a_3(a_3 + \cdots + a_n).$$

Na pravé straně využijeme zadané rovnosti $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 3$:

$$\begin{aligned}
1 &< a_1^2 + a_2^2 + a_3(3 - a_1 - a_2) = (a_1 + a_2)^2 - 2a_1a_2 + a_3(3 + a_3 - s) = \\
&= (s - a_3)^2 - 2a_1a_2 + a_3^2 + a_3(3 - s) = \\
&= s^2 - 2sa_3 + 2a_3^2 - 2a_1a_2 + a_3(3 - s) = \\
&= s^2 + a_3(3 - 3s) + 2(a_3^2 - a_1a_2).
\end{aligned}$$

Protože je a_3 nejmenší z čísel a_1, a_2, a_3, platí odhady $a_3^2 - a_1a_2 \leq 0$ a $a_3 \leq \frac{s}{3}$. Když by bylo navíc $s \leq 1$, měli bychom z předchozí nerovnice

$$1 < s^2 + \frac{s}{3}(3 - 3s) + 2 \cdot 0 = s \leq 1,$$

což je spor. Proto $s > 1$, tedy $a_1+a_2+a_3 > 1$, čímž je zadané tvrzení dokázáno.