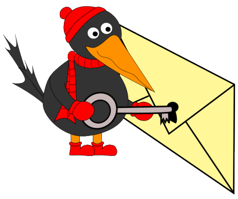
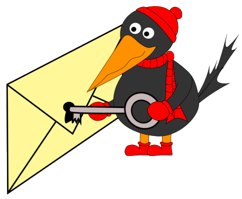


Vzorové řešení 3. série

Teorie čísel



Úloha 3.1.

Matěj si všiml, že počet lenochů v Lenošíně je dvakrát větší než počet hlupáků v Hloupětíně. Navíc platí, že počet hlupáků v Hloupětíně můžeme napsat jako součet dvou čtverců různých přirozených čísel. Dokažte, že i počet lenochů v Lenošíně můžeme napsat jako součet dvou čtverců přirozených čísel.

Řešení.

Víme, že počet hlupáků v Hloupětíně lze vyjádřit jako $m^2 + n^2$ pro nějaká přirozená čísla m, n. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $m > n$. Počet lenochů v Lenošíně je proto $L = 2(m^2 + n^2)$. Můžeme si ale všimnout, že

$$L = m^2 + 2mn + n^2 + m^2 - 2mn + n^2 = (m + n)^2 + (m - n)^2.$$

Číslo $m + n$ je přirozené zřejmě a protože m a n jsou dle zadání různá, je i $m - n$ přirozené.

Počet lenochů v Lenošíně je proto součtem kvadrátů dvou přirozených čísel, což jsme chtěli dokázat.

Úloha 3.2.

Liběnka si také všimla zajímavé skutečnosti. Totiž, že počet lenochů v Hloupětíně je čtyřciferné číslo tvaru aabb, které je druhou mocninou počtu hlupáků v Lenošíně. Kolik je tedy lenochů v Hloupětíně?

Řešení.

Počet lenochů v Hloupětíně vyjádříme jako

$$H = 1000a + 100a + 10b + b = 1100a + 11b = 11(100a + b).$$

Přitom má existovat přirozené číslo h splňující $h^2 = H$. Protože $11|H$ a 11 je prvočíslo, platí i $11|h$, proto $h = 11k$. Máme tedy $11^2k^2 = 11(100a + b)$, $11k^2 = 100a + b$, odtud $11|100a + b$. Protože $11|99a$, víme, že $11|a + b$. Protože a i b jsou menší než 10, je $a + b$ násobek 11 menší než 20, tedy $a + b = 11$. Nyní nám stačí vyzkoušet pro b hodnoty $1, 4, 5, 6, 9$ (žádnou jinou cifrou druhá mocnina končit nemůže), dopočítat a. Pak ověříme, že jsme narazili na čtverec.

Druhou možností je za $a + b$ dosadit 11, dostaneme $11k^2 = 99a + 11$, $k^2 = 9a + 1$. Platí tedy $9a = k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$. Protože $9a + 1 \leq 82$, je $k < 10$. Navíc $9|k - 1$, nebo $9|k + 1$ (čísla $k + 1$ a $k - 1$ totiž nemohou být současně dělitelné třemi). Pro k menší než 10 je splnitelná jen možnost $9|k + 1$, a to pro $k = 8$. Pak $9a + 1 = 64$, $a = 7$, $b = 4$.

Úloha 3.3.

Kouma přišel za Ňoumou se zajímavým příkladem. Měl z číslic $1, \dots, 9$ *sestrojit dvě čísla s největším možným součinem, přičemž každou číslici mohl použít právě jednou. Podařilo by se vám to také?*

Řešení.

Uvažujme již vytvořená čísla a, b, pro která platí $a > b$. Dále mějme číslici c, kterou je potřeba umístit na konec a, případně na konec b tak, aby byl součin co největší. Z nerovnosti $(10a + c)b - (10b + c)a = c(b - a) < 0$ plyne, že největší součin získáme, budeme-li číslici c přidávat vždy k menšímu číslu. Postupně tedy dostaneme:

$$\begin{array}{rl} 9 & 8 \\ 9 & 87 \\ 96 & 87 \\ 96 & 875 \\ 964 & 875 \\ 964 & 8753 \\ 9642 & 87531. \end{array}$$

Tím jsme získali dvě čísla s největším možným součinem.

Úloha 3.4.

Aby se Kouma nenudil zatím, co Ňouma počítal, dostal za úkol dokázat, že existuje nekonečně mnoho přirozených čísel, která nejsou součtem druhé mocniny přirozeného čísla a prvočísla. Poradili byste si i s Koumovým příkladem?

Řešení.

Zkusme tato čísla hledat ve tvaru k^2 pro přirozené k. Předpokládejme, že takové číslo lze zapsat jako $p + l^2$, kde p je prvočíslo a l přirozené číslo. Pak platí $p = k^2 - l^2 = (k + l)(k - l)$. Prvočíslo se součinu dvou čísel rovná právě tehdy, když jedno z nich je jednička. Jediný případ, kdy lze k^2 vyjádřit jako $p + l^2$ je ten, kdy $k - l = 1$. V tom případě $l = k - 1$,

$$p = (k + l)(k - l) = (k + k - 1) \cdot 1 = 2k - 1.$$

Stačí nám tedy volit k tak, aby $2k - 1$ nebylo prvočíslo. To ale jistě lze nekonečně mnoha způsoby. Vyhovují například všechna $k = 5n + 3$, kde n je libovolné přirozené číslo (pak $2k - 1 = 10n + 5 = 5(2n + 1)$, což zřejmě není prvočíslo).

Úloha 3.5.

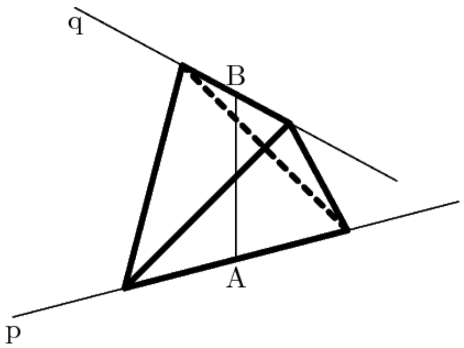
Henry se už nemohl dívat na to, jak jeho děti stále počítají, počítají a počítají. Ne že by neměl radost z toho, že je matematika baví a že by na ně nebyl pyšný. Ale přece jen existují i jiné věci... Například geometrie :) A tak jedno podzimní odpoledne zadal svým dětem následující příklad: Jsou dány dvě mimoběžné vzájemně kolmé přímky. Sestrojte pravidelný čtyřstěn, který bude mít dvě strany na těchto mimoběžkách. Poradili byste si i s tímto příkladem? Zadání volte libovolně a pokuste se řešení sestrojit v libovolném rovnoběžném promítání.

Řešení.

Prvním krokem je nalezení osy mimoběžek, tedy úsečky, která je kolmá na obě mimoběžky p, q a na každé z nich má jeden koncový bod. Jak na to? Nejprve zjistíme její směr. K přímce p sestrojíme libovolnou rovinu ρ, která je k ní kolmá. Podobně k přímce q sestrojíme libovolnou rovinu σ, která je k ní kolmá. Průsečnice rovin ρ a σ je přímka r, která je kolmá k oběma přímkám p, q. Nyní nám stačí sestrojit příčku mimoběžek rovnoběžnou s přímkou r. Přímku r posuneme tak, aby byla různoběžná s jednou z přímek p, q. Například tedy aby byla různoběžná s p. Tyto dvě různoběžky nám vytvoří rovinu τ. Ta protne přímku q v bodě B. Nyní již stačí bodem B vést rovnoběžku s přímkou r a v průsečíku s přímkou p dostáváme bod A.

Máme tedy osu mimoběžek, která je spojicí středů dvou protějších hran čtyřstěnu. (Každé dvě mimoběžky mají právě jednu osu a spojnice středů hran čtyřstěnu je osou přímek, na nichž tyto hrany leží.) Délku hrany čtyřstěnu můžeme získat dvěma způsoby. Geometričtější je ten, že sestrojíme libovolný čtyřstěn a zvětšíme ho tak, aby jeho spojnice středů protějších hran měla odpovídající délku. Druhý spočívá v tom, že délku osy vynásobíme $\sqrt{2}$, což pomocí kružítka a pravítka snadno zvládneme. (To, že je poměr mezi vzdáleností protějších hran a délkou hrany čtyřstěnu právě $\sqrt{2}$, lze ukázat tak, že v jednotkové krychli $A'B'C'D'E'F'G'H'$ uvážíme čtyřstěn $A'C'F'H'$ a spočítáme délku jeho hrany $A'C'$.)

Vrcholy čtyřstěnu musí ležet na přímkách p a q a mít od bodu B resp. A vzdálenost rovnou polovině nalezené délky hrany, snadno tedy všechny čtyři sestrojíme a spojíme do výsledného čtyřstěnu.



Na obrázku je znázorněna příčka AB a výsledný čtyřstěn ve volném rovnoběžném promítání.

BRKOS Team 2008

Úloha 3.6.

Matěj povídal Liběnce pohádku na dobrou noc. Byla to pohádka o vícehlavých dracích. V pohádce vystupoval jednohlavý, dvouhlavý, tříhlavý, . . . , osmihlavý a devítihlavý drak. Ve chvíli, kdy byla pohádka nejnapínavější, napadlo Liběnku, jestli je možné tyto draky rozmístit do kruhu tak, aby součet hlav dvou sousedních draků nebyl dělitelný třemi, pěti ani sedmi.

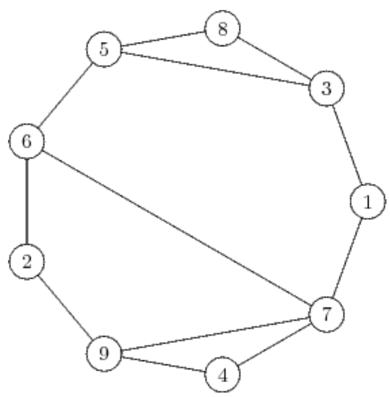
Řešení.

U této úlohy se dalo zadání převést na obrázek (říká se mu graf) a z něj pak řešení snadno vyčíst.

Na papír si nakreslíme draky (pro jednoduchost kolečka s čísly 1 až 9, kolečko s číslem i představuje i-hlavého draka). Pak vždy spojíme m-hlavého a n-hlavého draka, pokud mohou sedět kolem sebe. Spojnice budeme zapisovat pomocí závorek: (m, n) je spojnice m-hlavého a n-hlavého draka.

Snažíme se najít posloupnost spojnic $(k_1, k_2), (k_2, k_3), \ldots, (k_8, k_9), (k_9, k_1)$ takovou, že každý drak je v posloupnosti $k_1, k_2, \ldots k_n$ obsažen právě jednou. Pokud takovou posloupnost najdeme, pak posadíme draky tak, že vedle draka k_1 sedí drak k_2, vedle něj k_3 atd. To, že byli draci k_i a $k_{i+1 \text{ (mod 9)}}$ spojeni čarami, nám zaručí, že takové rozesazení je korektní.

Práci nám značně zjednoduší fakt, že pokud k nějakému drakovi vedou pouze dvě spojnice, musí být obě v posloupnosti. Vzorový obrázek je překreslen tak, aby z něj bylo správné rozesazení draků zřejmé.



Úloha 3.7.

Henry, Matěj a Liběnka vyhráli v soutěži, kterou vyhlásilo rádio „Polib hady“, spoustu sladkostí. Henry vyhrál $2n$ stejných gumových medvídků, Liběnka $2n$ stejných gumových žížalek a Matěj $2n$ stejných želatinových rybiček. Rozhodli se, že si sladkosti spravedlivě rozdělí tak, aby měl každý stejný počet sladkostí. Kolika různými způsoby to mohou udělat?

Řešení.

Sladkosti očíslujme od 1 do 3. Pro i od 1 do 3 řekněme, že i-tou sladkost si rozdělili tak, že Henry, Matěj a Liběnka dostali po řadě H_i, M_i a L_i kousků.

Přitom musí platit následující odhady:

$$\begin{aligned} H_1 + M_1 &\leq 2n \\ H_2 + M_2 &\leq 2n \\ M_1 + M_2 &\leq 2n \\ H_1 + H_2 &\leq 2n \\ H_1 + M_1 + H_2 + M_2 &\geq 2n \end{aligned}$$

První čtyři odhady plynou ze zadání. Pátý odvodíme z toho, že $4n-(H_1+M_1+H_2+M_2) = L_1+L_2 \leq 2n$. Tyto odhady jsou nejen nutné, ale i dostatečné. Pokud jsou splněny první čtyři, lze dopočítat L_1, L_2, M_3 a H_3 tak, že všechny tyto hodnoty vyjdou větší než 0. Navíc díky pátému předpokladu vyjde $H_3 + M_3 = L_1 + L_2 \leq 2n$, takže je možné dopočítat i L_3. Otázkou tedy je, kolik existuje čtveřic M_1, M_2, H_1, H_2 splňujících daných pět předpokladů.

Zafixujme součty $H_1 + H_2 = s$ a $M_1 + M_2 = t$ tak, aby $s \leq 2n$, $t \leq 2n$, $s + t \geq 2n$. Hodnota H_1 musí být od 0 do s, hodnota M_1 od 0 do t. To dává $(s+1)(t+1)$ možných dvojic H_1, M_1, ke každé z nich pomocí s a t dopočteme H_2 a M_2. Některé z nich ale nevyhovují prvním dvěma odhadům. Zkoumejme nejprve počet možných porušení prvního odhadu v závislosti na H_1. Pro dané $H_1 > 2n - t$ můžeme odhad porušit dosazením hodnot $2n-H_1+1, 2n-H_2+2, \dots t$ za M_1, tedy $t-2n+H_1$ způsoby (toto vyjádření počtu způsobů platí i pro $H_1 = 2n - t$). Sečteme-li toto přes všechna možná H_1 od $2n - t$ do s jako aritmetickou posloupnost (z předpokladu $s + t \leq 2n$ máme $2n - t \leq s$), dostaneme celkový počet porušení prvního předpokladu ve tvaru $\frac{(s+t-2n)(s+t-2n+1)}{2}$. Stejný počet dvojic nevyhoví druhému odhadu. Kdyby existovala dvojice porušující oba první odhady, platilo by pro ni (sečtením porušených odhadů) $H_1 + H_2 + M_1 + M_2 > 4n$, nalevo je ale součet $s + t \leq 4n$, takže toto nastat nemůže. Počet vyhovujících dvojic pro daná s, t je proto

$$(s+1)(t+1) - (s+t-2n)(s+t-2n+1).$$

Pro fixní t probíhá s od $2n - t$ do $2n$. Parametr t může nabývat hodnot 0 až $2n$. Hledaný počet všech čtveřic je proto

$$\sum_{t=0}^{2n} \sum_{s=2n-t}^{2n} (s+1)(t+1)-(s+t-2n)(s+t-2n+1) = \frac{(2n+1)(n+1)(2n^2+3n+2)}{2}.$$

Do posledního kroku výpočtu jsme schovali aplikaci vzorců pro součet aritmetických posloupností vyšších řádů a spoustu mechanických úprav vzorců. Lze je nahradit indukcí nebo metodou neurčitých koeficientů (víme, že výsledek bude tvaru $an^4 + bn^3 + cn^2 + dn + e$, pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$ vyčíslíme sumu ručně a dostaneme tak soustavu pěti rovnic o pěti neznámých pro a, b, c, d, e.)

BRKOS Team 2008