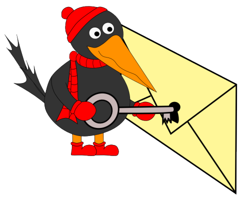
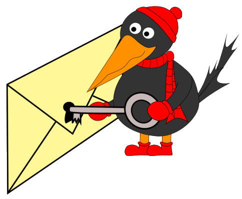


Vzorové řešení 2. série

Dirichletův princip



Úloha 2.1.

To jednoho dne přišel Matěj ze školy a už od dveří hulákal na Liběnku, že našel zajímavou čtveřici celých čísel a, b, c, d takovou, že součin rozdílů $b-a$, $c-a$, $d-a$, $c-b$, $d-b$ a $d-c$ je dělitelný dvanácti. A prý jestli také takovou najde. Liběnka se po chvíli začala smát a odvětila Matějovi, že tuto vlastnost má přeci libovolná čtveřice celých čísel. Podařilo by se vám to dokázat?

Řešení.

Abychom dokázali, že je součin dělitelný dvanácti, stačí, když ukážeme, že je dělitelný třemi a čtyřmi.

Čísla a, b, c, d rozdělíme nejprve podle toho, jaký zbytek dávají po dělení třemi. V jedné z těchto tří skupin musí být podle Dirichletova principu dvě čísla, jejichž rozdíl je dělitelný 3, součin rozdílů je proto dělitelný 3.

Nyní čísla rozdělme podle zbytku po dělení čtyřmi. Mohou nastat dvě možnosti: buď jsou v některé skupině dvě čísla (pak čtyřka dělí jejich rozdíl a máme vyhráno), nebo je v každé skupině právě jedno. V takovém případě je ale rozdíl čísel, která dávají zbytek 1 a 3, dělitelný 2, stejně jako rozdíl čísel, která dávají zbytek 2 a 4. Součin dvou sudých rozdílů je dělitelný čtyřmi, proto je čtyřmi dělitelný i součin všech.

Ukázali jsme tak dělitelnost třemi i čtyřmi a tím i požadovanou dělitelnost dvanácti.

Úloha 2.2.

Firma Hlou–zátko (Hloupětínské lízátko) vyhlásila soutěž, kdo během prázdnin nasbírá největší počet tyček od lízátek. Každé z n dětí, které se soutěže účastnilo (mezi nimi i velcí lízalové Kouma s Ňoumou), nasbíralo počet tyček od lízátek, který nebyl dělitelný n. Dokažte, že ze soutěžících dětí lze vybrat skupinu takovou, že počet tyček od lízátek, které nasbírala tato skupina dohromady, bude již dělitelný n.

Řešení.

Děti si seřaďme do zástupu. Označme s_k celkový počet tyček od lízátek, která nasbíralo prvních k dětí v zástupu. Pokud je nějaké s_k dělitelné n, pak je prvních k dětí přímo tou hledanou skupinkou. V opačném případě máme n různých čísel s_k, která mohou dávat pouze $n-1$ různých zbytků po dělení n (zbytek 0 jsme už rozebrali).

Dvě z nich, s_k a s_l, tedy dávají stejný zbytek (BÚNO $l > k$). Když vybereme ze zástupu prvních l dětí a prvních k z nich pošleme zpět, bude mimo zástup skupinka $l-k$ dětí, které celkem nasbíraly $s_l - s_k$ lízátkových tyček, což je počet dělitelný n.

Takovou skupinku se nám proto vždy podaří najít.

BRKOS Team 2008

Úloha 2.3.

To se jednou Kouma s Ňoumou pěkně pohádali. Kouma tvrdil, že přirozená čísla 1...100 *můžeme rozdělit do* 12 *geometrických posloupností. Ňouma si však myslel opak. Který z kamarádů má pravdu?*

Řešení.

Kdyby měl Kouma pravdu, muselo by v některé posloupnosti být alespoň 9 čísel. Kvocient takové posloupnosti je podíl dvou po sobě jdoucích členů, po zkrácení je to nějaké racionální číslo $\frac{r}{q}$, kde r, q jsou nesoudělná. Na celočíselné kvocienty se omezit nemůžeme, protože například posloupnost $16, 24, 36, 54, 81$ je také geometrická (s kvocientem $\frac{3}{2}$).

Pokud by nejmenší číslo v posloupnosti bylo a a největší b, bylo by

$$b = a\left(\frac{r}{q}\right)^8, \text{ tedy } \; bq^8 = ar^8.$$

Z předpokladu $b > a$ plyne nerovnost $\frac{r}{q} > 1$, proto $r > 1$. Víme tedy, že r je dělitelné nějakým prvočíslem p. Z výše uvedené rovnosti $bq^8 = ar^8$ je patrné, že $p^8|bq^8$. Jelikož je ale r nesoudělné s q, musí nutně platit $p^8|b$, takže $b \geq p^8 \geq 2^8 = 256$. Aby mohla mít geometrická posloupnost 9 po sobě jdoucích prvků rovných přirozeným číslům, musí být největší z nich větší nebo roven 256.

Proto čísla od 1 do 100 na 12 geometrických posloupností rozdělit nelze.

Úloha 2.4.

Matěj s Liběnkou napsali na papír čísla od 1 *do* 2008 *v úplně náhodném pořadí. Matěj se na ně podívá a říká: „Je zajímavé, že žádných* 224 *čísel nejde obarvit zeleně tak, aby zelená posloupnost byla rostoucí". Liběnka povídá: „Mě přijde zajímavější, že žádných* 10 *nejde obarvit tak, aby výsledná posloupnost byla klesající." A z kuchyně se ozval Henry: „Nevím, v jakém pořadí jsou ta čísla napsána, ale jeden z vás určitě nemá pravdu." Jak to mohl Henry vědět?*

Řešení.

Řešení je trochu trikové. Pro každé číslo a_k v posloupnosti si budeme pamatovat dvojici (h_k, l_k), kde h_k je délka nejdelší rostoucí podposloupnosti končící číslem a_k, l_k délka nejdelší klesající podposloupnosti končící a_k. Pokud by měli Matěj i Liběnka pravdu, bylo by vždy $h_k \leq 223$ a $l_k \leq 9$. Různých dvojic by mohlo být nejvíce $223 \cdot 9 = 2007$. Podle Dirichletova principu by musely dvěma číslům příslušet stejné dvojice. Řekněme, že $h_k = h_i$ a $l_k = l_i$, kde $i > k$. Pokud by bylo $a_i > a_k$, můžeme každou rostoucí posloupnost končící a_k doplnit o a_i a prodloužit ji tak, což by vedlo na $h_i \geq h_k + 1$. Pokud by bylo $a_i < a_k$, můžeme každou klesající posloupnost končící a_k doplnit o a_i a prodloužit ji tak, což by vedlo na $l_i \geq l_k + 1$. Ani v jednom případě nemůže rovnost dvojic nastat, což je spor. Buď Matěj, nebo Liběnka proto nemají pravdu.

Úloha 2.5.

Kouma napsal na tabuli čísla 13 *a* 19 *a povídá Ňoumovi, že v jednom kroku může smazat jedno z čísel a nahradit ho součtem smazaného a druhého čísla. Mohl takto Ňouma po konečně mnoha krocích dostat na tabuli číslo* 2008*?*

Řešení.

Pokud si všimneme, že $2008 = 105 \cdot 19 + 13$, je řešení snadné: Ňouma si bude číslo 19 nechávat na tabuli a v i-tém kroku vždy nahradí $13+(i-1)\cdot 19$ číslem $13+i\cdot 19$. Po 105 krocích budou na tabuli čísla 19 a 2008.

Úloha 2.6.

Již dlouho trápil Matěje jeden příklad, ale to mu hrdost nedovolila, aby se šel poradit za Liběnkou, či dokonce za Henrym. Liběnka však nalezla v pokojíčku čmáranice s výpočty a zadání si lehce odvodila a dokonce i příklad vyřešila. Když se potom jednou Matěj vrátil z venku vybafla na něj: „Tak už je všechny mám!“ Matěj nechápal a Liběnka s radostí Matějovi ukázala, že našla všechna přirozená čísla n taková, že $n+d(n)+d(d(n)) = 2008$, kde $d(n)$ značí ciferný součet čísla n. Matěj jen zalapal po dechu. Dokázali byste vyřešit i tento příklad jako Liběnka?

Řešení.

Zde se nám bude hodit známý fakt, že číslo k dává po dělení 9 stejný zbytek jako $d(k)$. Když toto tvrzení použijeme na čísla n a $d(n)$, zjistíme, že n, $d(n)$ a $d(d(n))$ dávají stejný zbytek z po dělení 9. Tato 3 čísla tedy můžeme zapsat jako $9a+z$, $9b+z$ a $9c+z$. Jejich součet je $3(3a+3b+3c+z)$, musí být proto dělitelný 3. Protože 2008 dělitelné 3 není, žádné takové n neexistuje.

Úloha 2.7.

V Hloupětíně stavěli novou knihovnu, která měla, jak už tak knihovny mívají, podivuhodný tvar, kterému se odborně říká šestiúhelníková antiprisma (jinak také hranolec), kterou si můžeme představit takto:

Máme v prostoru dva shodné pravidelné šestiúhelníky takové, že přímka spojující jejich středy je kolmá k rovinám, ve kterých šestiúhelníky leží. Navíc platí, že tyto šestiúhelníky jsou vůči sobě pootočeny tak, aby měly společnou rovinu symetrie a přitom jejich vrcholy neurčovaly hranol. A aby toho nebylo málo, když pospojujeme vrcholy jednoho s vrcholy druhého, dostaneme těleso, které má kromě dvou šestiúhelníkových stěn 12 *stěn ve tvaru rovnoramenných trojúhelníků. Výšku knihovny označme v, plochu podstavy S, průřez polovině výšky P. Ukažte, že pro objem knihovny V platí $V = \frac{v(S+2P)}{3}$.*

Řešení.

Vztah, který chceme dokázat, trochu rozepíšeme:

$$V = \frac{v(2S+4P)}{6} = \frac{v(S+4P+H)}{6},$$

kde S a H jsou plochy spodní a horní podstavy. Proč to děláme, když $S = H$? Budeme totiž chtít dokázat, že takovýto vztah platí pro jednoduchá tělesa, pomocí nichž lze antiprismu vytvořit.

Hranol má horní i dolní podstavu rovnu průřezu v polovině výšky, pro jeho objem platí $V = vP = v\frac{6P}{6} = \frac{v(S+4P+H)}{6}$, což odpovídá dokazovanému vztahu.

Průřez trojbokým jehlanem v polovině výšky je trojúhelník stejnolehlý s podstavou s koeficientem stejnolhlosti $\frac{1}{2}$, oproti základně má proto poloviční základnu i výšku a tudíž čtvrtinový obsah.

Pro jehlan umístěný špičkou nahoru platí $H = 0$, $P = \frac{S}{4}$, proto $V = \frac{vS}{3} = \frac{v(S+S+0)}{6} = \frac{v(S+4P+H)}{6}$. Symetricky pro jehlan špičkou dolů $S = 0$, $P = \frac{H}{4}$, proto $V = \frac{vH}{3} = \frac{v(0+H+H)}{6} = \frac{v(S+4P+H)}{6}$. I jehlan vyhoví dokazovanému vztahu.

Antiprisma vznikne z dvanáctibokého hranolu o objemu V_0 odříznutím dvanácti jehlanů o objemech V_i a průřezech S_i, P_i, H_i, kde i jde od 1 do 12. Platí pro ni proto

$$\begin{aligned} V &= V_0 - V_1 - \ldots - V_{12} \\ &= \frac{v}{6}(S_0 - S_1 - \ldots - S_{12} + 4P_0 - 4P_1 - \ldots 4P_{12} + H_0 - H_1 - \ldots H_{12}) \\ &= \frac{v}{6}(S + 4P + H). \end{aligned}$$

To je vztah, který jsme chtěli dokázat.