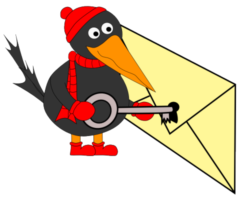
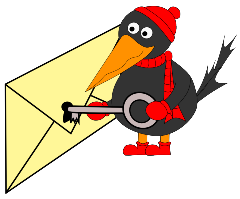


Vzorové řešení 1. série

Posloupnosti



Úloha 1.1.

V Hloupětíně postavili novou továrnu na lentilky. Když začínali s výrobou, vyrobili první den 4 krabičky lentilek, druhý den 44 krabiček lentilek, třetí den 444 krabiček lentilek a takto narůstala produkce každým dnem. Kolik krabiček lentilek měli vyrobených po n dnech od spuštění továrny?

Řešení.

Než budeme s to určit, kolik krabiček vyrobili za n dní celkem, musíme spočítat, kolik vyrobili i-tý den. To lze zapsat jako

$$4 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^2 + \cdots + 4 \cdot 10^{i-1}.$$

Použitím triku pro sčítání geometrické posloupnosti, který jsme uvedli v textu k sérii, toto sečteme a vyjde nám $\frac{4}{9}(10^i - 1)$. (Toho si někteří z vás všimli, aniž by museli nějakou řadu sčítat.)

Počítáme tedy součet

$$\frac{4}{9}(10 - 1) + \frac{4}{9}(10^2 - 1) + \cdots + \frac{4}{9}(10^n - 1).$$

Kdybychom závorky roznásobili, dostaneme n záporných sčítanců, každý o hodnotě $\frac{4}{9}$, a n kladných sčítanců, i-tý o hodntě $\frac{4}{9}10^i$. Součet záporných sčítanců je $-\frac{4}{9}n$, součet kladných (opět použitím triku pro sčítání geometrické posloupnosti) je $\frac{4}{9} \cdot 10 \cdot \frac{10^n-1}{9}$. Celkem tedy vyrobili $\frac{4(10^{n+1}-10-9n)}{81}$ krabiček.

Úloha 1.2.

Liběnka obarvovala přirozená čísla od 1 do 9 zelenou a modrou barvou. Matěj ji povídá: „Schválně, jestli je obarvíš tak, aby žádná tři čísla stejné barvy netvořila aritmetickou posloupnost.“ Mohlo se to Liběnce podařit?

Řešení.

Abychom dokázali, že posloupnost takovým způsobem obarvit nelze, budeme předpokládat, že to jde, a pokusíme se dojít ke sporu.

Můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že číslo 5 je obarvené zeleně.

Předpokládejme, že 3 je zelená. Pak musí být modrá čísla 4 (kvůli posloupnosti $3, 4, 5$), 7 (kvůli posloupnosti $3, 5, 7$), 1 (kvůli posloupnosti $1, 3, 5$). Aritmetická posloupnost $1, 4, 7$ je pak celá modrá, což nelze, trojka je proto modrá.

Stejně rozmyslíme, že modrá musí být sedmička (úloha je symerická podle čísla 5).

Kdyby byla 4 modrá, musela by být 2 zelená (kvůli $2, 3, 4$), 8 modrá (kvůli $2, 5, 8$), 9 zelená (kvůli $7, 8, 9$), 1 modrá (kvůli $1, 5, 9$). Posloupnost $1, 4, 7$ je pak celá modrá, což je spor, čtyřka je proto zelená.

Symetricky je tedy zelená i šestka, posloupnost $4, 5, 6$ je celá zelená, což nelze. Rozebrali jsme všechny případy a vždy došli ke sporu. Žádné vyhovující obarvení proto neexistuje.

Úloha 1.3.

V Lenošíně již tradičně probíhá soutěž Šikuly Chytrolína, pojmenovaná po jednom z nejvýznamnějších lenošínských matematiků. V prvním kole se objevil tento příklad:

Dokažte, že každý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, *kde* $a_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$, *je přirozené číslo.*

Kouma s Ňoumou se této soutěže samozřejmě zúčastili a tento příklad hravě vyřešili. Když si pak o svých řešeních povídali, zeptal se Kouma Ňoumy, jestli by dokázal určit všechna n, *pro která je člen* a_n *dělitelný třemi. Dokázali byste vyřešit příklad z lenošínské soutěže i odpovědět na Koumovu otázku?*

Řešení.

Nejprve rozeberme celkem standardní způsob, jak úlohu řešit:

Výrazy $(2+\sqrt{3})^n$ a $(2-\sqrt{3})^n$ rozepíšeme dle binomické věty:

$$(2+\sqrt{3})^n = 2^n + \binom{n}{1}2^{n-1}\sqrt{3} + \binom{n}{2}2^{n-2}\sqrt{3}^2 + \cdots + \sqrt{3}^n,$$
$$(2-\sqrt{3})^n = 2^n - \binom{n}{1}2^{n-1}\sqrt{3} + \binom{n}{2}2^{n-2}\sqrt{3}^2 + \cdots + (-\sqrt{3})^n.$$

Jejich odečtením vypadnou všechny členy, které mají u $\sqrt{3}$ sudý exponent:

$$(2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n = 2\left(\binom{n}{1}2^{n-1}\sqrt{3} + \binom{n}{3}2^{n-3}\sqrt{3}^3 + \cdots + \binom{n}{k}\sqrt{3}^k\right),$$

kde $k = n$, pro n liché, a $k = n-1$, pro n sudé. Když tento výraz vydělíme $2\sqrt{3}$, exponenty u $\sqrt{3}$ se změní na sudé, dostaneme

$$a_n = \binom{n}{1}2^{n-1} + \binom{n}{3}2^{n-3}3 + \cdots + \binom{n}{k}3^{\frac{k-1}{2}}.$$

Všechny prvky tohoto součtu jsou celá čísla, navíc kromě prvního dělitelná třemi. Proto je a_n dělitelné třemi právě, když je první člen $(n \cdot 2^{n-1})$ dělitelný třemi. To nastává právě, když $3|n$.

A nyní druhé, méně standardní řešení:

Ukážeme, že pro danou posloupnost platí

$$a_{n+2} = 4a_{n+1} - a_n, \qquad a_1 = 1, \qquad a_2 = 4.$$

(Důkaz budiž z cvičných důvodů ponechán laskavému čtenáři.)
Odtud je vidět, že i všechny prvky posloupnosti jsou celá čísla. Co se týče dělitelnosti třemi, z upraveného rekurentního vztahu

$$a_{n+3} = 4a_{n+2} - a_{n+1} = 16a_{n+1} - 4a_n - a_{n+1} = 15a_{n+1} - 4a_n$$

plyne, že zbytek a_{n+3} po dělení třemi závisí pouze na zbytku a_n po dělení třemi. Protože a_1 i a_2 dávají zbytek 1, žádný prvek a_{3k+1} ani a_{3k+2} není dělitelný třemi, a_3 dělitelné třemi je, a proto i všechny prvky a_{3k}.

Úloha 1.4.

Henry Klevr se jednoho dne obořil na své děti, že jsou strašlivě zlobivé. Matěj s Liběnkou mu však odvětili, že je zajímavé, že má tolik zlobivých dětí, jako je prvočísel v posloupnosti $10001, 100010001, 1000100010001, \ldots$*. Henryho tato úvaha zaujala a pěkně se nasmál, když ji vyřešil. Kolik má Henry podle Matěje s Liběnkou zlobivých dětí?*

Řešení.

Nejprve si musíme uvědomit, že i-tý prvek posloupnosti je dán vzorcem

$$a_i = 1 + 10\,000 + \cdots + 10\,000^i = \frac{10\,000^{i+1} - 1}{9\,999}.$$

Nyní použijeme vzorec pro rozdíl čtverců

$$a_i = \frac{(100^{i+1} - 1)(100^{i+1} + 1)}{9\,999}.$$

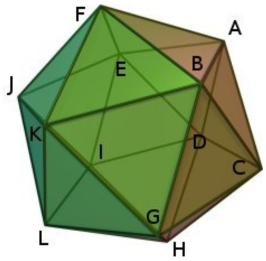
Protože a_i je vždy celé číslo, dělí $9\,999$ čitatele zlomku. Proto lze rozložit $9\,999 = t_i \cdot u_i$, přičemž t_i dělí prvního činitele v čitateli a u_i druhého. Pak $a_i = \frac{100^{i+1}-1}{t_i} \cdot \frac{100^{i+1}+1}{u_i}$. Oba zlomky jsou vždy celá čísla, pro $i > 1$ jsou jejich čitatele větší než $99\,999$, oba zlomky jsou větší než 1, a_i je číslo složené.

Zbývá ukázat, že $a_1 = 10\,001$ je také složené číslo. Po chvilce tipování zjistíme, že $10\,001 = 73 \cdot 137$.

Úloha 1.5.

Kouma s Ňoumou si v bazénu házeli dvoubarevným míčem. Nebyl to ale obyčejný míč – jeho obarvení bylo tak zvláštní, že o něm šlo s jistotou říct pouze to, že každý bod na povrchu míče je buď zelený, nebo modrý. Okolní plavci neměli pro jejich hrátky pochopení, a proto jim plavčík míč zabavil. Když si ho šli při odchodu Kouma s Ňoumou k plavčíkovi vyzvednout, řekl, že jim ho vrátí, až dokážou, že mohou na míči vybrat tři body stejné barvy tak, aby tvořily vrcholy rovnostranného trojúhelníku.

Řešení.



Uvažme dvacetistěn $ABCDEFGHIJKL$, jehož vrcholy leží na povrchu míče. Mezi vrcholy mohou být tři typy vztahů: *sousední* – jsou spojeny hranou, *protější* – leží na stejném průměru, *obkročné* – nejsou sousední ani protější.

Všech 12 vrcholů má jednu z barev, častěji použitou barvu má alespoň 6 z nich. Řekněme, že je to modrá barva a že ji má i vrchol A. Mohou nastat tři možnosti:

1. Alespoň 3 z bodů B, C, D, E, F jsou modré. Pak jsou nějaké dva z nich sousední a spolu s vrcholem A tvoří rovnostranný trojúhelník.
2. Alespoň 3 z bodů G, H, I, J, K jsou modré. Pak jsou některé dva z nich obkročné a tvoří s vrcholem A rovnostranný trojúhelník.
3. Dva z bodů B, C, D, E, F, dva z bodů G, H, I, J, K jsou modré. Protože modrých je alespoň 6, je bod L modrý. Pokud jsou modré body z pětice B, C, D, E, F sousední, tvoří rovnostranný trojúhelník s bodem A. Pokud jsou obkročné tvoří rovnostranný trojúhelník s bodem L.

Ukázali jsme tedy Silnější tvrzení: pro každý dvacetistěn vepsaný kouli má nějaká trojice jeho vrcholů tvořící rovnostranný trojúhelník stejnou barvu.

Úloha 1.6.

Když ráno Matěj s Liběnkou vstávali, našli na stole od Henryho vzkaz, že mohou jít ven, až se jim podaří vynulovat celá tabulka o m řádcích a n sloupcích, ve které je v každém políčku napsané nějaké přirozené číslo. V jednom kroku přitom mohou buď vynásobit všechna čísla ležící v jednom řádku dvěma, nebo odečíst jedničku od všech čísel ležících v jednom sloupci. Může se to Matějovi a Liběnce podařit po konečně mnoha krocích?

Řešení.

Začneme tím, že vynulujeme všechna čísla v nejlevějším sloupci. Budeme postupovat takto:

1. Pokud všechny řádky mají v tomto sloupci jedničku, odečteme jedničku a jsme hotovi (dále nepokračujeme).
2. Všechny řádky, jež mají v tomto sloupci jedničku, vynásobíme dvěma.
3. Odečteme jedničku.

Tuto trojici kroků nazveme cyklem a opakujeme ji stále dokola. Všimneme si, že pokud $m \in \mathbb{N}$ je před daným cyklem největší číslo ve sloupci, je po tomto cyklu největším číslem $m - 1$. Navíc na konci cyklu (pokud jsme v něm sloupec nevynulovali) jsou všechna čísla větší než 0. Po $m - 1$ cyklech tedy nastanene stav, že jsou všechna čísla nejvýše 1 a přitom větší než 0, v dalším cyklu se sloupec vynuluje.

Našli jsme algoritmus na vynulování sloupce. Ten nyní můžeme aplikovat stejně na všechny další sloupce, protože jeho použití na sloupec A nemůže nijak ovlivnit už vynulovaný sloupec B (čísla v tomto sloupci jsou v dalších úpravách pouze násobena dvěmi). Takto postupně vynulujeme celou tabulku.

Úloha 1.7.

Matěj s Liběnkou Henryho příklad po chvíli rozluštili a na druhou stranu papíru mu napsali, že si může sednout k novinám, až dokáže, že je-li rozdíl třetích mocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel druhou mocninou přirozeného čísla y, pak je toto číslo y součtem druhých mocnin dvou po sobě jdoucích přirozených čísel. Zvládli byste to také?

Řešení.

Rozdíl třetích mocnin po sobě jdoucích čísel je tvaru

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1.$$

Pokud se toto rovná číslu y^2, máme

$$\begin{aligned} y^2 &= 3k^2 + 3k + 1, \\ 4y^2 &= 3(4k^2 + 4k + 1) + 1, \\ 4y^2 &= 3(2k+1)^2 + 1, \\ (2y-1)(2y+1) &= 3(2k+1)^2. \end{aligned}$$

Máme dvě nesoudělná čísla $2y - 1$, $2y + 1$ (jejich největší společný dělitel d musí dělit jejich rozdíl, tj. 2, ale zřejmě $d \neq 2$, proto $d = 1$). Všechna prvočísla kromě trojky dělí pravou stranu v sudé mocnině, proto musí dělit v sudé mocnině i levou stranu, přičemž na levé straně dělí vždy jen jednoho z činitelů. Vzhledem k nesoudělnosti $2y - 1$ a $2y + 1$ je vždy jedno z těchto čísel druhou mocninou lichého čísla a druhé trojnásobkem kvadrátu lichého čísla.

Pokud by bylo $2y - 1 = 3t^2$ a $2y + 1 = q^2$, bylo by $q^2 = 3t^2 + 2$, což nelze (q^2 nedává pro žádné q zbytek 2 po dělení 3).

Druhou možností je $2y - 1 = (2u + 1)^2$, $2y + 1 = 3(2v + 1)^2$. Pak z první rovnice vypočteme $y = 2u^2 + 2u + 1 = u^2 + (u + 1)^2$, tím je zadané tvrzení dokázáno.