Vzorové řešení
6. série

Úloha 6.1.

Konečně v Hloupětíně roztál všechen sníh a Kouma s Ňoumou se vydali na první jarní výlet na hrad Ftipín. U vstupu do hradu našli tento nápis: „Ten, kdo středověký problém rozluštit dokáže, zadarmo na náš hrad Ftipín vstoupit může.“ Pod tímto nápisem bylo zadání příkladu: „Dokažte, že pokud pro celá čísla a, b, c, d *platí* $(a - c) \mid (ab + cd)$, *pak* $(a - c) \mid (ad + bc)$.“

Řešení.

Předpokládejme, že $a-c$ dělí výraz $V = ab+cd$. Pak potřebujeme ukázat, že $a - c$ dělí i výraz $W = ad + bc$. K tomu nám pomůže, když ukážeme, že $a - c \mid V - W$. Platí

$$V - W = ab - ad + cd - bc = a(b - d) - c(b - d) = (a - c)(b - d).$$

Protože podle zadání $a - c \mid V$ a podle předchozího $a - c \mid V - W$, pak $a - c \mid V - (V - W) = W$, což jsme měli dokázat.

Úloha 6.2.

To Matěj s Liběnkou se vydali do nového lanáče, co vyrostl v Lenošíně. Nejvíce se jim líbila jedna zapeklitá překážka. V kovovém rámu, který měl tvar konvexního n*-úhelníku, bylo mezi vrcholy nataženo několik lan tak, že se žádná dvě nekřížila. Když se Matěj s Liběnkou na této překážce dostatečně vyblbnuli, napadl je zajímavý příklad. Zajímalo je, kolik nejvíce lan lze napnout mezi vrcholy rámu tak, aby se žádná dvě nekřížila. Dokažte, že je to nejvíce* $n - 3$ *a že trojúhelníkových oblastí vytvořených lany a rámem je v tomto případě* $n - 2$.

Řešení.

Důkaz povedeme matematickou indukcí.

V prvním kroku indukce ukážeme, že tvrzení platí pro $n = 3$. V takovém případě je n-úhelník trojúhelníkem a nemá žádné úhlopříčky, tvrzení proto platí. Pro názornost udělejme rozbor i pro $n = 4$. V konvexním čtyřúhelníku můžeme udělat pouze jednu úhlopříčku, která vyhovuje našim požadavkům. Ta nám čtyřúhelník rozdělí na 2 trojúhelníky, tvrzení je opět splněno.

Předpokládejme, že tvrzení platí pro všechna čísla n od 3 do k. Dokažme nyní, že platí i pro $n = k + 1$. Vyznačme některé úhlopříčky $(k + 1)$-úhelníku tak, aby se žádné dvě vyznačené úhlopříčky neprotínaly a aby nebylo možno vyznačit žádnou další úhlopříčku. Mezi nimi uvažme libovolnu úhlopříčku u. Ta nám tento mnohoúhleník rozdělí na konvexní r-úhelník R a konvexní s-úhelník S, kde $3 \le r, s \le k$, a $r + s = (k + 1) + 2 = k + 3$ (dva z vrcholů

$k+1$-úhelníku jsou společné R a S). Z indukčního předpokladu víme, že pro tyto dva mnohoúhelníky tvrzení platí.

Všechny vyznačené úhlopříčky $(k+1)$-úhelníku různé od u jsou buď neprotínajícími se úhlopříčkami S (těch je z indukčního předpokladu nejvýše $s-3$), nebo neprotínajícími se úhlopříčkami R (těch je nejvýše $r-3$). Včetně u má tedy daný $(k+1)$-úhelník nejvýše $1+(s-3)+(r-3) = r+s-5 = k+3-5 = (k+1)-3$ neprotínajících se úhlopříček, což jsme chtěli dokázat. Navíc jsou R i S podle indukčního předpokladu rozděleny vyznačenými úhlopříčkami na $r-2$, resp. $s-2$ trojúhelníkových oblastí. Celý mnohoúhelník je tedy těmito úhlopříčkami a úhlopříčkou u rozdělen na $(r-2)+(s-2) = r+s-4 = n-1 = (n+1)-2$ trojúhelníkových oblastí. Tímto jsme indukcí dokázali obě části tvrzení.

Úloha 6.3.

V Hloupětíně a Lenošíně volí parlament společného prezidenta podobným systémem jako u nás. Rozdíl je v tom, že jedna komora parlamentu zasedá v Hloupětíně a druhá v Lenošíně a každý z konečně mnoha zákonodárců si může vybrat, ve které komoře bude zasedat. Navíc, na rozdíl od našeho parlamentu, každý zákonodárce má mezi ostatními zákonodárci pouze tři nepřátele, přičemž nepřátelství je vždy oboustranné. Ukažte, že parlament bude moci při volbě zasedat takovým způsobem, že každý zákonodárce bude mít ve své komoře nejvýše jednoho nepřítele.

Řešení.

Pro každého poslance p označme $n(p)$ počet jeho nepřátel, kteří jsou ve stejné komoře jako p. Pro libovolné rozdělení poslanců můžeme uvážit součet N hodnot $n(p)$ přes všechny poslance. Protože tento součet musí být kladný a nabývá pouze celočíselných hodnot, existuje takové rozdělení R, pro které je tento součet nejmenší.

Nyní ukážeme, že rozdělení R má požadovanou vlastnost, tedy že v něm pro všechna p platí $n(p) \leq 1$. Pokud by nějaký poslanec měl při rozdělení R ve své komoře dva nebo tři nepřátele, mohl by v té druhé mít nejvýše jednoho, jeho přechod do druhé komory by snížil N. Protože jsme ale předpokládali, že nejmenší N nastává pro rozdělení R, není toto možné. Každý poslanec má proto při rozdělení R ve své komoře nejvýše jednoho nepřítele.

Úloha 6.4.

Hrad Ftipín vlastnil v 15. století rod Ftipálků z Ftipálkova. Roku 1468 však ve vodním příkopě před hradem tragicky utonul jediný dědic hradu. Rodiče onoho nešťastníka tedy stáli před otázkou, komu hrad po jejich smrti připadne. Mnoho rodů ze širokého okolí mělo o tento skvost zájem. Byla tedy vypsána soutěž. Hrad získá ten rod, který nalezne všechny takové množiny čtyř reálných čísel, že součet libovolného čísla z hledané množiny se součinem zbylých tří čísel je roven 2. Dokázal by se i tvůj rod ucházet o hrad?

Řešení.

Nejprve bychom rádi upravili jednu nepřesnost v zadání, která naštěstí řešitele nerozhodila: místo čtyřprvkových množin budeme hledat čtveřice čísel.

Součin všech čtyř čísel označme t. Pak pro libovolné číslo x z hledané čtveřice platí $x+\frac{t}{x}=2$, po vynásobení x a odečtení $2x$ tedy $x^2-2x+t=0$. Toto je kvadratická rovnice a ta může mít pouze dva kořeny. Hledaná čtveřice může proto obsahovat nejvýše dvě různá čísla. Pokud jsou všechna čísla ve čtveřici rovna x, pak platí, že $x^3+x=2$. Protože je funkce $y=x^3+x$ rostoucí, má tato rovnice nejvýše jedno řešení a tím je $x=1$.

Pokud by čtveřice obsahovala dvě různá čísla a, b každé dvakrát, platilo by $a+ab^2=2$, $b+a^2b=2$, po odečtení rovnic $(a-b)(1-ab)=0$. Protože jsou a, b různá, je první závorka nenulová, druhá musí být nulová. Máme tedy $ab=1$, $t=a^2b^2=1$. Kořeny jsou pak řešeními rovnice $x^2-2x+1=0$, jsou tedy všechny rovny 1 (spor s $a\neq b$). Tato možnost nastat nemůže.

Pokud by čtveřice obsahovala jedno číslo a a tři čísla b, platilo by $a+b^3=2$ a $b+ab^2=2$, po odečtení $(a-b)(1-b^2)=0$. Protože $a\neq b$, $b^2=1$. Pro $b=1$ dopočteme $a=1$ (opět spor s $a\neq b$), pro $b=-1$ je $a=3$.

Řešením jsou tedy neuspořádané čtveřice $(1,1,1,1)$ a $(3,-1,-1,-1)$.

Úloha 6.5.

Když se Matěj s Liběnkou vraceli domů, říkali si, že již dlouho nevymysleli pro Henryho nějaký pěkný příklad. Matěj navrhl, že by ho mohli nechat vyřešit nějakou zajímavou nerovnici. Liběnka pak dodala, že jednu by měl určitě hned vyřešenou a že tedy musí vymyslet nějakou soustavu. A tak Matěj s Liběnkou střídavě psali jednu nerovnici za druhou a než přišli domů, vznikla z toho tato soustava 100 nerovnic o 300 neznámých:

$$\begin{aligned} a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3&\geq 0,\\ a_2x_4+a_3x_5+a_4x_6&\geq 0,\\ &\vdots\\ a_{99}x_{295}+a_{100}x_{296}+a_1x_{297}&\geq 0,\\ a_{100}x_{298}+a_1x_{299}+a_2x_{300}&\geq 0. \end{aligned}$$

Henrymu prozradili, že tato soustava má řešení: $(1,-3,2,1,-3,2,\dots,1,-3,2)$. *Henry měl dokázat, že pak* $a_1=a_2=\dots=a_{100}$. *Dokázali byste to také?*

Řešení.

Dosaďme řešení do soustavy a dostáváme:

$$\begin{aligned} a_1-3a_2+2a_3&\geq 0,\\ a_2-3a_3+2a_4&\geq 0,\\ &\vdots\\ a_{99}-3a_{100}+2a_1&\geq 0,\\ a_{100}-3a_1+2a_2&\geq 0. \end{aligned}$$

Označme $M=\max\{a_1,\dots,a_{100}\}$ a n přirozené číslo takové, že $a_n=M$. Pro zjednodušení popisu položme pro $i\in\{1,2\}$ $a_{100+i}=a_i$ a $a_{-i}=a_{100-i}$.

Jedna z nerovností je tvaru $a_{n-1} - 3a_n + 2a_{n+1} \geq 0$, po úpravě

$$a_{n-1} + 2a_{n+1} \geq 3a_n = 3M. \tag{6.1}$$

My ale víme, že $a_{n-1} \leq M$, $2a_{n+1} \leq 2M$, takže

$$a_{n-1} + 2a_{n+1} \leq 3M. \tag{6.2}$$

Aby mohlo být splněno (6.1) i (6.2), musí v obou nerovnostech nastat rovnost, což lze pouze pro $a_{n-1} = a_{n+1} = M$. Takto jsme ukázali, že pokud $a_n = M$, pak $a_{n-1} = M$ i $a_{n+1} = M$. Protože existuje n takové, že $a_n = M$, plyne odtud podle matematické indukce, že $a_i = M$ pro všechna i od 1 do 100. Tím je zadané tvrzení dokázáno.

Úloha 6.6.

Osmé nádvoří hradu Ftipín má tvar trojúhelníku, jehož délky vyjádřené v hloupětínských mílích jsou tři po sobě jdoucí přirozená čísla. Jeden z vnitřních úhlů tohoto trojúhelníku má dvojnásobnou velikost než jiný vnitřní úhel. Dokázali byste najít všechny možnosti, jak mohlo nádvoří přesně vypadat?

Řešení.

Úhly proti stranám délek $n-1, n, n+1$ postupně označme α, β, γ. Sestavme si všechny kosinové věty, které v trojúhelníku platí:

$$\begin{aligned}(n-1)^2 &= n^2 + (n+1)^2 - 2n(n+1)\cos\alpha,\\ n^2 &= (n-1)^2 + (n+1)^2 - 2(n+1)(n-1)\cos\beta,\\ (n+1)^2 &= n^2 + (n-1)^2 - 2n(n-1)\cos\gamma.\end{aligned}$$

Odtud postupně vyjádříme

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{n+4}{2n+2},\\ \cos\beta &= \frac{n^2+2}{2n^2-2},\\ \cos\gamma &= \frac{n-4}{2n-2}.\end{aligned}$$

Protože proti kratší straně je menší úhel, je $\alpha < \beta < \gamma$. Mohou nastat 3 možnosti: $\beta = 2\alpha$, $\gamma = 2\alpha$, $\gamma = 2\beta$. V následujících úpravách rovnic můžeme předpokládat, že výrazy $n-1$ a $n+1$ jsou nenulové.

(i) $\beta = 2\alpha$:
Pak $\cos\beta = \cos(2\alpha)$. Užitím známého vzorce

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

dostáváme rovnici

$$\frac{n^2+2}{2n^2-2} = 2\frac{(n+4)^2}{(2n+2)^2} - 1$$

a po vynásobení $2(n-1)(n+1)^2$ dostáváme

$$\begin{aligned}(n^2+2)(n+1) &= (n+4)^2(n-1) - 2(n-1)(n+1)^2,\\ n^3 - 2n^2 - 4n + 8 &= 0.\end{aligned}$$

Toto můžeme rozložit na $(n-2)(n^2-4) = 0$ a jediné přirozené číslo, které je řešením této rovnice, je 2. To ale vede na trojúhelník o stranách 1, 2, 3, který nelze sestrojit.

(ii) $\gamma = 2\alpha$:
Analogicky sestavíme rovnici

$$\frac{n-4}{2n-2} = 2\frac{(n+4)^2}{(2n+2)^2} - 1,$$

upravíme do tvaru $2n^3 - 7n^2 - 17n + 10 = 0$. Víme, že pro racionální kořen $\frac{p}{q}$ musí platit, že $p \mid 10$ a $q \mid 2$. To nám dává pouze omezenou množinu možných kořenů. Vyhoví například číslo 5, po vytknutí výrazu $n-5$ dostáváme rovnici ve tvaru

$$(n-5)(2n^2+3n-2) = 0.$$

Kořeny polynomu $2n^2+3n-2$ jsou -2 a $\frac{1}{2}$, z nichž ani jeden není přirozené číslo. Jediný kořen 5 vede na sestrojitelný trojúhelník, který má délky stran 4, 5, 6.

(iii) $\gamma = 2\beta$:
V tomto případě má platit

$$\frac{n-4}{2n-2} = 2\frac{(n^2+2)^2}{(2n^2-2)^2} - 1.$$

Roznásobením a úpravami převedeme rovnici na tvar

$$2n^4 - 3n^3 - 13n^2 + 3n + 2 = 0.$$

Podobně jako v předchozím případě můžeme odštěpit racionální kořeny, dostaneme tak rovnici

$$(n+2)(2n-1)(n^2-3n-1) = 0.$$

Snadno zjistíme, že žádný z kořenů této rovnice není přirozené číslo.

Jediným vyhovujícím trojúhelníkem je tedy trojúhelník o stranách $4, 5, 6$.

Úloha 6.7.

Henry se pořádně napočítal při řešení úlohy, kterou mu zadaly jeho děti. A aby jim nezůstal nic dlužen, poprosil je, zda-li by dokázaly určit ciferný součet čísla, které je ciferným součtem ciferného součtu čísla 4444^{4444}. *Henry jim dovolil, aby pracovaly pouze v desítkové soustavě, ale pokud by náhodou přišly na něco zajímavého i v jiné číselné soustavě (například pětkové), jistě by je neminula odměna v podobě bodů navíc do jisté matematické soutěže. Dokázali byste jim pomoci?*

Řešení.

Ciferný součet čísla 4444^{4444} označme A, ciferný součet čísla A označme B, ciferný součet B označme C. Protože ciferný součet je operace, která zachovává zbytek po dělení devíti, dávají A, B i C stejný zbytek, jako zadané číslo. Nyní tedy určíme zbytek čísla 4444^{4444} po dělení devíti.

Použijeme k tomu větu, že pokud $n \mid a - b$, pak pro všechna přirozená k platí $n \mid a^k - b^k$. Tato věta plyne z rovnosti

$$a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}).$$

Víme, že $9 \mid 4444 - (-2)$, proto

$$\begin{aligned}
&9 \mid 4444^{4444} - (-2)^{4444},\\
&9 \mid 4444^{4444} - (-2)^{3\cdot 1481+1},\\
&9 \mid 4444^{4444} - (-8)^{1481} \cdot (-2).
\end{aligned}$$

Protože $9 \mid 1 - (-8)$, platí i $9 \mid 1 - (-8)^{1481}$. Proto

$$\begin{aligned}
&9 \mid 4444^{4444} - (-8)^{1481} \cdot (-2) + 2\left((1 - (-8)^{1481})\right),\\
&9 \mid 4444^{4444} + 2.
\end{aligned}$$

Odtud plyne, že 4444^{4444} dává zbytek -2 (čili 7) po dělení devíti, zbytek 7 proto dává i C.

Nyní se pokusíme C odhadnout shora. Protože $4444^{4444} < (10^5)^{4444}$, má toto číslo méně než $5 \cdot 4444 = 22\,220$ cifer, proto $A < 9 \cdot 22\,220 < 200\,000$. Proto $B \leq 1 + 9 + 9 + 9 + 9 + 9 = 46$, $C \leq 3 + 9 = 12$. Číslo menší nebo rovné 12 dávající zbytek 7 po dělení 9 je jedině 7, proto $C = 7$.

Poznámka.

Nechť čísla A, B, C mají stejný význam jako výše. V pětkové soustavě platí podobné pravidlo pro dělitelnost čtyřmi jako je v desítkové soustavě pro dělitelnost devíti a dále operace ciferný součet v pětkové soustavě zachovává zbytek po dělení čtyřmi. Jistě $4 \mid \left(4444^{4444}\right)_5$, takže 4 musí dělit i hledané číslo C. Protože $\left(4444^{4444}\right)_5 = \left(\left(5^4 - 1\right)^{624}\right)_{10} < \left(5^{4\cdot 624}\right)_{10}$, je počet cifer čísla 4444^{4444} v pětkové soustavě nejvýše $4 \cdot 624$. Tudíž $A \leq (4 \cdot 4 \cdot 624)_{10} < \left(5^6 - 1\right)_{10}$ a z toho plyne, že $B < (4 \cdot 6)_{10} = (24)_{10} = (44)_5$. Proto $C \leq 4 + 3 = 7$. Jediné přirozené číslo menší nebo rovno 7, které má v pětkové soustavě ciferný součet dělitelný čtyřmi, je 4, takže $C = 4$.