Vzorové řešení

5. série

Úloha 5.1

Jednou navečer zase vyprávěl Henry svým dětem pohádku. Tentokrát o Sněhurce. A to by nebyl Henry, aby do toho nezamontoval nějaký pěkný příklad... Totiž, když trpaslíci odešli ráno do práce, zůstala Sněhurka v chaloupce sama. Aby se nenudila, ušila trpaslíkům nové čepice. Protože neměla dostatek látky jedné barvy, čepičky pro Štístka, Kýchala, Prófu, Rýpala, Bručouna, Stydlína a Šmudlu byly dvou barev. Když se trpaslíci vrátili domů, byli nadšením celí bez sebe. Vždyť ty jejich staré čepice už byly celé odrané. A tak si trpaslíci čepice rozebrali a zasedli ke stolu. Ten měl tvar pravidelného sedmiúhelníku a židličky byly umístěné tak, že trpaslíci seděli právě ve vrcholech sedmiúhelníku. No a hádejte, co dal Henry dětem za úkol? Měly dokázat, že existuje takový rovnoramenný trojúhelník s vrcholy ve vrcholech stolu, že v jeho vrcholech sedí trpaslíci s čepičkou stejné barvy....

Matěj s Liběnkou už ani nevnímali, jak pohádka pokračovala dále, a přemýšleli, jak vyřešit Henryho úkol. Zvládli byste to také?

Řešení:

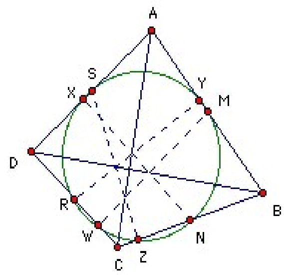
Předpokládejme, že trpaslíci sedí kolem stolu např. ve směru hodinových ručiček v tomto pořadí: Bručoun, Kýchal, Prófa, Rýpal, Stydlín, Šmudla a Štístko. Sednou-li si náhodou jinak, jednoduše je přejmenujeme, jim to jistě nebude vadit :o) Protože počet vrcholů stolu je lichý, musí mít dva sousední trpaslíci čepičku stejné barvy. BÚNO nechť jsou to trpaslíci Rýpal a Stydlín s cyanovou čepičkou (předpokládejme, že druhá barva čepiček je neidentifikovatelná). Má-li Prófa nebo Šmudla cyanovou čepičku, máme cyanový rovnoramenný trojúhelník Prófa-Rýpal-Stydlín, případně Rýpal-Stydlín-Šmudla, takže nechť Prófa a Šmudla mají čepičku neidentifikovatelné barvy. Pak, ať je barva Bručounovy čepičky cyanová nebo neidentifikovatelná, je jeden z rovnoramenných trojúhelníků Bručoun-Rýpal-Stydlín, Bručoun-Prófa-Šmudla jednobarevný.

Úloha 5.2

Když Kouma shrnoval sníh před Ňoumálkovic domečkem, všiml si, že stromy v jejich zahradě tvoří vrcholy konvexního čtyřúhelníku. A tak začal pobíhat s hrabákem na sníh a "rýsovat" s ním do sněhu různé obrazce. Když ho uviděl Ňouma, začal se mu hlasitě posmívat. Kouma ho však zastavil: "Podívej, tady ve sněhu jsem vyznačil konvexní čtyřúhelník $ABCD$. Úhlopříčky v tomto čtyřúhelníku jsou na sebe kolmé. Zde jsem vyznačil body M, N, R, S, které jsou postupně středy stran AB, BC, CD, AD. Dále zde máme body W, X, Y, Z, což jsou paty kolmic vedené z bodů M, N, R, S na strany CD, AD, AB, BC. Tak mi teď posměváčku dokaž, že vyznačené body M, N, R, S, W, X, Y, Z leží na jedné kružnici."

Pomozte Ňoumovi s touto úlohou.

Řešení:



MN je střední příčka trojúhelníku ABC, tudíž $MN \parallel AC$. Podobně dostaneme, že $NR \parallel BD$. Protože $AC \perp BD$, je $|\angle MNR| = 90°$. Stejným způsobem dojdeme k tomu, že $|\angle NRS| = |\angle RSM| = |\angle SMN| = 90°$, tudíž $MNRS$ je obdélník, a tedy body M, N, R a S leží na jedné kružnici. Navíc MR a NS jsou průměry této kružnice. Je-li $W \neq R$, platí $|\angle MWR| = 90°$, takže podle Thaletovy věty bod W také leží na této kružnici. Analogicky dostaneme, že také body X, Y a Z leží na této kružnici.

Úloha 5.3

Když se to Ňoumovi podařilo dokázat, šli se s Koumou zahřát dovnitř. Chtěli si zahrát dámu, jenže v tom nepořádku v Koumově pokojíku se jim nepodařilo najít figurky. A tak seděli nad prázdnou šachovnici, když v tom Ňoumu napadl zajímavý příklad. A protože se chtěl Koumovi pomstít za ten jeho, okamžitě mu ho začal diktovat: "Podívej, Koumo, rozdělím tuto šachovnicí na p disjunktních obdelníků (strany těchto obdélníků se mohou skládat pouze ze stran čtverců šachovnice) tak, že v každém obdélníku bude stejný počet bílých a černých polí a každý obdélník bude obsahovat různý počet polí. Dokážeš nalézt největší takové p a pro toto p určit všechny možné obsahy obdélníků?"

Kouma se pěkně zapotil, než na to přišel. Pokuste se o to také.

Řešení:

Podmínka, že v každém obdélníku musí být stejný počet černých a bílých polí, je ekvivalentní s podmínkou, že počet polí (čtverců) v obdélníku musí být sudý. Protože $2+4+6+8+10+12+14+16 = 72$, je určitě $p < 8$. Pro $p = 7$ dostáváme pět možných rozdělení podle počtu čtverců v obdélnících:

$$2+4+6+8+10+12+22,$$
$$2+4+6+8+10+14+20,$$
$$2+4+6+8+10+16+18,$$
$$2+4+6+8+12+14+18,$$
$$2+4+6+10+12+14+16.$$

První případ můžeme vyloučit, protože $22 = 2 \cdot 11$ nebo $22 = 1 \cdot 22$ a obdelník o straně 11 ani o straně 22 by se do šachovnice $8 \cdot 8$ nevešel. Další čtyři možnosti připadají v úvahu. Nalezněme pro ně tedy rozmístění, čímž dokážeme existenci:

1	1	3	3	3	3	3	3
6	6	2	2	4	4	4	4
6	6	2	2	4	4	4	4
6	6	5	5	7	7	7	7
6	6	5	5	7	7	7	7
6	6	5	5	7	7	7	7
6	6	5	5	7	7	7	7
6	6	5	5	7	7	7	7

6	6	6	6	6	6	6	6
6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	3	3
7	7	7	7	7	7	3	3
7	7	7	7	7	7	3	3
5	5	5	5	5	1	2	2
5	5	5	5	5	1	2	2
4	4	4	4	4	4	4	4

6	6	6	6	6	6	6	1
6	6	6	6	6	6	6	1
7	7	7	7	7	7	4	4
7	7	7	7	7	7	4	4
7	7	7	7	7	7	4	4
5	5	5	5	5	5	4	4
5	5	5	5	5	5	2	2
3	3	3	3	3	3	2	2

7	7	7	7	7	7	7	7
7	7	7	7	7	7	7	7
6	6	6	6	6	6	6	1
6	6	6	6	6	6	6	1
5	5	5	5	5	5	2	2
5	5	5	5	5	5	2	2
4	4	4	4	4	3	3	3
4	4	4	4	4	3	3	3

Úloha 5.4

Matěj s Liběnkou hráli zajímavou hru. Střídavě doplňovali koeficienty do soustavy rovnic s neznámými x, y, z:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0. \end{aligned}$$

Matěj začínal. V případě, že nakonec soustava měla nějaké nenulové řešení, vyhrál Matěj. V opačném případě vyhrála Liběnka.

Dokažte, že pro Matěje existuje vyhrávající strategie, a popište ji.

Řešení:

Matěj může dosáhnout toho, aby soustava měla řešení $x = 0, y = 1, z = -1$. V prvním tahu zvolí a_1 libovolně. Dále bude pokračovat tak, aby pro $i \in \{1, 2, 3\}$ bylo $b_i = c_i$. Dosáhne toho jednoduše. Pokud v některém tahu Liběnka zvolí nějakou hodnotu pro b_i, resp. c_i, zvolí následně Matěj stejnou hodnotu pro c_i, resp. b_i, kde $i \in \{1, 2, 3\}$. Pokud Liběnka zvolí libovolnou hodnotu pro a_2, resp. a_3, hned po ní zvolí Matěj libovolnou hodnotu pro a_3, resp. a_2. Je zřejmé, že Matěj tímto postupem dosáhne shodnosti koeficientů u y a z ve všech rovnicích, i kdyby se Liběnka třeba postavila na hlavu. Lehce se ověří, že soustavě potom vyhovuje výše zmíněné řešení.

Úloha 5.5

Když Henry viděl, jakou zajímavou hru jeho děti hrají, přišel k nim a pozoroval je a kibicoval. Matěj s Liběnkou ho však odehnali se slovy, že se může dívat, až jim na čtverečkovaném papíře vyznačí tři průsečíky čar, které tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníku. Henry souhlasil a začal nad tímto příkladem přemýšlet.

Dokažte, že se Henry již k dětem nevrátil, tedy že takovéto body na čtverečkovaném papíře vyznačit nelze.

Řešení:

BÚNO předpokládejme, že rozměry čtverečků na papíře jsou 1×1. Obsah rovnostranného trojúhelníka o straně a je roven $S = a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Protože jsou vrcholy trojúhelníka v průsečících čar na čtverečkovaném papíře, je díky Pythagorově větě a^2 přirozené číslo. Tedy obsah tohoto trojúhelníka je polovinou součinu přirozeného a iracionálního čísla. Dokažme, že toto číslo je iracionální:

Stačí dokázat, že žádné z čísel $n \cdot \sqrt{3}$, kde $n \in \mathbb{N}$, není celé. (Pokud by pro nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$ bylo $n_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ racionální, bude jistě číslo $n_1 \cdot n_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, kde n_1 je jmenovatel čísla $n_0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, celé, což je spor s tvrzením, které si teď také sporem dokážeme.) Nechť S je množina všech přirozených čísel n, pro která je $n \cdot \sqrt{3}$ racionální. Pokud je S neprázdná, bude mít nejmenší prvek k. Uvažujme číslo $(\sqrt{3} - 1) \cdot k$. Pak

$$(\sqrt{3} - 1) \cdot k \cdot \sqrt{3} = 3k - k \cdot \sqrt{3},$$

a protože $k \in S$, jsou $(\sqrt{3} - 1) \cdot k$ i $3k - k \cdot \sqrt{3}$ přirozená čísla. Tudíž, podle definice množiny S, $(\sqrt{3} - 1) \cdot k \in S$. Ale $(\sqrt{3} - 1) \cdot k < k$, což je spor s tím, že k je nejmenší prvek množiny S.

Na druhou stranu můžeme rovnostranný trojúhelník získat tak, že z obdelníku s rozměry v oboru přirozených čísel odstřihneme trojúhelníky s racionálním obsahem (za obdélník vezmeme nejmenší obdelník se stranami splývajícími s čárami na čtverečkovaném papíře, který jde tomuto trojúhelníku opsat). Pokud od racionálního čísla odečteme několik racionálních čísel, dostaneme racionální číslo, tudíž náš trojúhelník musí mít racionální obsah.

Tím jsme došli ke sporu, protože jednou má mít trojúhelník racionální a podruhé iracionální obsah.

Úloha 5.6

Henry to samozřejmě po chvíli zjistil a sám se smál, jak dětem naletl na špek. A tak jim také vymyslel příklad. Do tabulky 6 x 5 políček napsal libovolně všechna přirozená čísla 1 až 30. Děti měly zjistit, v jakém políčku je jaké číslo. Na rozmístění se však mohly pětkrát zeptat, a to tak, že zadaly libovolnou množinu políček a Henry jim odpověděl, jaká čísla jsou v nich napsána (nikoliv však ve kterém políčku je jaké číslo). Matějovi se nakonec podařilo přijít na fígl, jak pomocí těchto pěti otázek vždy zrekonstruovat celou tabulku.

Dokázali byste to také?

Řešení:

Množina $\{1, \ldots, 5\}$ má právě 31 neprázdných podmnožin. Vezměme 30 z nich a každému políčku jednu přiřaďme. V první otázce budeme chtít seznam čísel, která jsou na políčkách s přiřazenou podmnožinou obsahující jedničku. Ve druhé se zeptáme na políčka s přiřazenou podmnožinou obsahující dvojku. . . , v páté otázce se zeptáme na políčka s přiřazenou podmnožinou obsahující pětku. Z tohoto již lehce dovodíme, jaká čísla jsou v jednotlivých polích.

Číslo, které jsme obdrželi pouze při první otázce a nikdy jindy, bude jistě v políčku, kterému byla přiřazena množina $\{1\}$. Obdobně pro $\{2\}, \ldots$ Dále číslo, které jsme obdrželi právě dvakrát (při první a druhé otázce), bude jistě v políčku, kterému jsme přiřadili $\{1, 2\}$. Obdobně vyplníme celou tabulku. Protože žádným dvěma políčkům není přiřazena stejná množina, nebudou se shodovat výskyty žádných dvou čísel v odpovědích, takže tabulku skutečně tímto způsobem půjde zrekonstruovat.

Úloha 5.7

Když rodiče Koumy zjistili, jaký má chlívek ve svém pokoji, okamžitě ho zahnali, aby si uklidil. Kouma chtě nechtě musel jít. Při uklízení však našel zajímavou knížku a v ní tento příklad: Nechť a, b, c, d jsou celá čísla. Ukažte, že rovnice

$$x^2 + ax + b = y^2 + cy + d$$

má nekonečně mnoho celočíselných řešení právě tehdy, když

$$a^2 - 4b = c^2 - 4d.$$

Velice rád by se pustil do počítání, ale musel uklízet.

Zvládli byste vyřešit tento příklad?

Řešení:

Musíme dokázat dvě implikace, začněme tou druhou.

- " $\Leftarrow$ ": Pokud $a^2 - 4b = c^2 - 4d$, pak zřejmě a^2 i c^2 jsou buď obě sudá, nebo obě lichá čísla, tudíž a i c jsou buď obě sudá, nebo obě lichá. Z toho plyne, že $\frac{c-a}{2}$ je celé číslo. Dále mějme libovolné celé číslo x a položme $y = x - \frac{c-a}{2}$. Pak $x + \frac{a}{2} = y + \frac{c}{2}$, takže

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2 - 4b}{4} = \left(y + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2 - 4d}{4}, \text{tj.}$$
$$x^2 + ax + b = y^2 + cy + d.$$

  Tudíž daná rovnice má nekonečně mnoho řešení.

- " $\Rightarrow$ ": Tento směr budeme dokazovat nepřímo. Mějme pevná $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ taková, že $(a^2 - 4b) - (c^2 - 4d) = k \neq 0$, a nechť (x_0, y_0) je řešením rovnice $x^2 + ax + b = y^2 + cy + d$. Pak

$$\left(x_0 + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b = \left(y_0 + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{c^2}{4} + d,$$
$$\left[2\left(x_0 + \frac{a}{2}\right)\right]^2 - a^2 + 4b = \left[2\left(y_0 + \frac{c}{2}\right)\right]^2 - c^2 + 4d,$$
$$(2x_0 + a)^2 - (2y_0 + c)^2 = (a^2 - 4b) - (c^2 - 4d) = k,$$
$$(2x_0 + 2y_0 + a + c)(2x_0 - 2y_0 + a - c) = k.$$

Avšak k lze rozložit na součin dvou celočíselných činitelů pouze konečně mnoha způsoby, existuje tedy pouze konečně mnoho možných hodnot pro dvojici $(2x_0 + 2y_0 + a + c), (2x_0 - 2y_0 + a - c)$. Máme tedy konečně mnoho dvojic rovnic o dvou neznámých x_0, y_0, přičemž rovnice jsou tvaru $x_0 + y_0 = r, x_0 - y_0 = s$ pro vhodná $r, s \in \mathbb{Z}$. Sečtením těchto rovnic dostaneme $x_0 = \frac{r+s}{2}$, odečtením rovnic dostaneme $y_0 = \frac{r-s}{2}$. Takže každá z těchto konečně mnoha dvojic rovnic má jediné řešení, tudíž existuje pouze konečně mnoho řešení (x_0, y_0) rovnice $x^2 + ax + b = y^2 + cy + d$, což bylo potřeba dokázat.