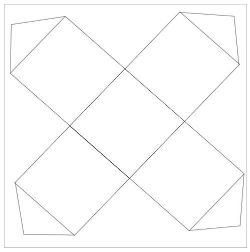
Vzorové řešení

4. série

Úloha 4.1

Kouma koupil Ňoumovi k Vánocům Rubikovu kostku. Strana kostky měří 10 cm. Když mu ji však chtěl zabalit do vánočního papíru, zjistil, že má k dispozici pouze čtvercový papír 30 x 30 cm. Může z tohoto papíru vystřihnout jeden souvislý díl, s nímž by mohl dárek obalit (zanedbejte nutné přesahy)?

Řešení:



Kouma bude moci Rubikovu kostku pro Ňoumu zabalit, provést to může tak, jak je vidět na obrázku. Odvěsny krajních pravoúhlých trojúhelníků mají délku $5\sqrt{2}$, takže pro stranu složenou ze stran tří čtverců o straně 10 cm máme k dispozici délku délku $(30 - 5\sqrt{2}) \cdot \sqrt{2}$ cm $= (30\sqrt{2} - 10)$ cm > 32 cm, což nám stačí, protože jsme potřebovali délku alespoň 30 cm.

Úloha 4.2

Matěj s Liběnkou seděli celí nedočkaví v pokojíku a čekali, kdy se konečně ozve cinkání zvonku a budou moci jít ke stromečku. Když se ono cinkání ozvalo, rychle běželi do obýváku, ale ve dveřích je zastavil Henry (zapomněl totiž zapálit svíčky na stromku) a řekl jim, že prý můžou ke stromečku, až určí hodnotu funkce f v bodě 2008. Funkce $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ je definovaná takto: Pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ jsou splněny následující podmínky:

1. $f(m \cdot n) = f(m) + f(n)$,
2. $f(n) = 0$, pokud poslední cifra zápisu čísla n v desítkové soustavě je 3,
3. $f(10) = 0$.

Řešení:

Opakovaným použitím 1. podmínky zjistíme, že $f(2008) = f(2^3 \cdot 251) = 3 \cdot f(2) + f(251)$. Dále $0 = f(10) = f(2) + f(5)$, tudíž $f(2) = 0$, protože oborem hodnot funkce f je podmnožina nezáporných čísel. Z 2. podmínky také plyne, že $0 = f(753) = f(3) + f(251)$, takže $f(251) = 0$. Celkem tedy $f(2008) = 0$.

Úloha 4.3

Kouma s Ňoumou se na Silvestra sešli i se svými kamarády na chatě u Koumálků. Hráli různé hry a dávali si také zajímavé příklady. V jednom z nich měl Kouma najít nejmenší přirozené číslo n takové, že

$$999999 \cdot n = 11 \ldots 11$$

Řešení:

Danou rovnost si převedeme na schůdnější tvar:

$$(10^6 - 1) \cdot n = \frac{10^k - 1}{9},$$

tedy $n = \frac{10^k - 1}{9 \cdot (10^6 - 1)}$, kde $k \in \mathbb{N}$. Dělením se zbytkem zjistíme, že

$$(10^k - 1) : (10^6 - 1) = 10^{k-6} + 10^{k-12} + \cdots + 10^{k-6m} + \frac{10^{k-6m} - 1}{10^6 - 1},$$

kde $m \in \mathbb{N}$ je takové, že $k - 6m \in \{0, 1, \ldots, 5\}$. Protože n musí být celé číslo, musí být i číslo $\frac{10^{k-6m}-1}{10^6-1}$ celé a protože $k - 6m \in \{0, 1, \ldots, 5\}$, je to možné jedině pokud $10^{k-6m} - 1 = 0$, tj. $k = 6m$. Pak

$$n = \frac{10^{6(m-1)} + 10^{6(m-2)} + ... + 10^6 + 1}{9}.$$

Aby číslo v čitateli bylo dělitelné 9, musí být ciferný součet tohoto čísla dělitelný 9. Nejmenší takové číslo je pro $m = 9$, tudíž $k = 6 \cdot 9$. Pak hledané číslo n je rovno $\frac{10^{54}-1}{9 \cdot (10^6-1)}$. Pro zajímavost uvedeme zápis čísla n v desítkové soustavě: 111 111 222 222 333 333 444 444 555 555 666 666 777 777 888 889.

Úloha 4.4

Matěj s Liběnkou odjeli se třídou na lyžák. Byla to paráda. Zasněžené hory, stromy se prohýbaly pod sněhovými čepicemi, nádherná lyžovajda, po večerech pohodová nálada. Jedno dopoledne měli volné, a tak se vydali stavět sněhuláky. Soutěžili o nejkrásnější sněhovou stavbu. Matěj chtěl postavit krychlového sněhuláka. Když měl hotovou první obrovskou krychli, ptala se ho Liběnka, co prý to bude. Matěj odvětil, že jí to řekne, až mu odpoví na následující otázku: "Pokud všechny vrcholy této sněhové krychle ohodnotím 1 nebo -1 a každé stěně krychle přiřadím součin čísel jejích vrcholů, jaké budou všechny možné hodnoty součtů těchto 14 čísel (ze stěn a z vrcholů krychle)?"

Řešení:

Pokud bude každý vrchol ohodnocen číslem 1, dostaneme součet 14, který je zřejmě nejvyšší možný. Nejnižší součet bude větší než -14, protože jsou-li všechny vrcholy ohodnoceny -1, stěnám budou přiřazeny jedničky. Pokud změníme hodnotu vrcholu, změníme také hodnotu tří stěn. Pokud tyto čtyři hodnoty byly stejné, po změně hodnoty vrcholu bude změna celkového součtu ± 8. Pokud z těchto čtyř hodnot byly tři stejné a jedna jiná, bude změna součtu ± 4. A pokud byly dvě hodnoty stejné a dvě opačné, po změně hodnoty vrcholu nenastane žádná změna celkového součtu. Takže po jakékoli posloupnosti změn hodnot vrcholů můžeme potenciálně dosáhnout těchto hodnot: $14, 10, 6, 2, -2, -6$ a -10. Ukážeme, že hodnota 10 není možná. Pokud mají alespoň tři vrcholy hodnotu -1, součet vrcholů je nejvíce 2 a protože je jen 6 stěn, součet bude méně než 10. Případ se všemi vrcholy s číslem 1 jsme už probrali a pokud má právě jeden vrchol hodnotu -1, je celkový součet 6.

Nakonec, máme-li právě dva vrcholy s hodnotou -1, existuje vždy stěna obsahující jediný z nich, tudíž aspoň jedné stěně je přiřazeno číslo -1, takže celkový součet může být maximálně 8. Všechny ostatní hodnoty součtů jsou možné, uvedeme příklady, jak dosáhnout hodnot, které ještě nebyly zmíněny:

- 2: tři vrcholy na jedné stěně -1, zbylé vrcholy 1,
- -2: všechny vrcholy -1,
- -6: všechny vrcholy s výjimkou jednoho -1,
- -10: dva protější rohy 1, zbylé -1.

Úloha 4.5

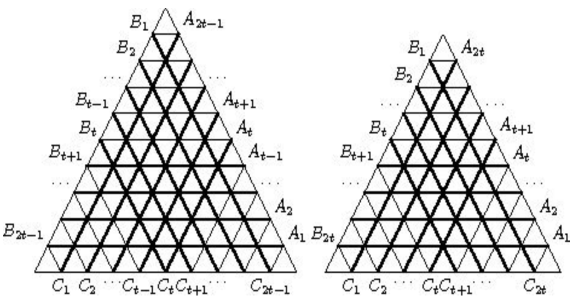
No jo, to zase Ňouma seděl nad úkolem o něco déle než Kouma. Ten z toho byl už nervózní a chtěl s úkolem Ňoumovi pomoci, aby mohli jít konečně ven. Měli v plánu vyrazit na běžky a svítící sluníčko tomu úplně nahrávalo. Ňouma si na to však chtěl přijít sám. A tak, aby se Kouma nenudil, vymyslel pro něj příklad. Na papír mu nakreslil rovnostranný trojúhelník o straně $n \in \mathbb{N}$. Tento trojúhelník potom rozdělil trojúhelníkovou sítí na n^2 shodných rovnostranných trojúhelníků o straně 1, jejichž vrcholy budeme nazývat uzly. Vrcholy největšího trojúhelníku obarvil červeně, zbylé uzly obarvil zeleně. Kouma měl potom najít nejmenší $m \in \mathbb{N}$, pro které existuje m přímek takových, že každý zelený uzel leží alespoň na jedné z nich a žádný červený uzel neleží na žádné z těchto přímek.

Řešení:

Na obvodu trojúhelníka je $3n$ uzlů, z toho $3n-3$ zelených. Žádná z přímek nemůže procházet třemi zelenými uzly na obvodu, protože pak by musely všechny tyto tři uzly ležet na stejné straně, přímka by procházela i vrcholem, což nelze. Proto každá přímka prochází nejvýše dvěma z těchto uzlů a platí, že $2m \geq 3n - 3$. Odtud $m \geq \left\lceil \frac{3n-3}{2} \right\rceil$, kde $\lceil x \rceil$ je nejmenší celé číslo alespoň rovné x.

Teď ukážeme, že nám $m = \left\lceil \frac{3n-3}{2} \right\rceil$ stačí (tj. že pro $n = 2t$ stačí $m = 3t-1$ a pro $n = 2t+1$ stačí $3t$). Provedeme to tak, že najdeme vhodné uspořádání pro sudá a lichá n (viz obrázek):

Vnitřní uzly na stranách označíme A_i, B_i, C_i podle obrázku a pak spojíme C_k a A_{n-k}, B_k a C_{n-k} a A_k a C_{n-k}, kde $k < \frac{n}{2}$, čímž vytvoříme $3(t-1)$ spojnic pro sudá n a $3t$ spojnic pro lichá n. Pro sudá n navíc musíme přidat spojnice C_tB_t a C_tA_t.



Úloha 4.6

Když se Matěj s Liběnkou vraceli z lyžáku, většina jejich kamarádů v autobuse usnula. A tak se Liběnka pustila do řešení Hloupětínské olympiády. V prvním příkladu měla dokázat, že pro všechna $a, b, c > 0$ platí:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

Řešení:

Nejdříve si všimněme, že

$$0 = (a-b) + (b-c) + (c-a) = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3-c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3-a^3}{c^2+ca+a^2},$$

tudíž

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} = \\ = \frac{b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{a^3}{c^2+ca+a^2}.$$

Takže nám stačí dokázat, že

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} + \frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2} + \frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{2(a+b+c)}{3}.$$

Dále platí: $2(a-b)^2 = 2a^2-4ab+2b^2 \geq 0$, z toho $3(a^2-ab+b^2) \geq a^2+ab+b^2$, tudíž $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{1}{3}$. Odtud

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2} = (a+b)\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{a+b}{3}.$$

Stejným způsobem dostaneme dvě obdobné nerovnosti a sečtením těchto tří nerovností dostaneme nerovnost, kterou jsme potřebovali dokázat. Úpravy během řešení byly korektní: protože $a, b, c > 0$, násobili jsme nerovnosti vždy kladným číslem.

Jiné řešení:

Dokážeme nerovnost $\frac{a^3}{a^2+ab+b^2} \geq \frac{2a-b}{3}$. Tato nerovnost nastane, právě když

$$3a^3 \geq (2a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = 2a^3+2a^2b+2ab^2-a^2b-ab^2-b^3, \text{ tj.}$$
$$0 \leq a^3-a^2b-ab^2+b^3 = a^2(a-b)-b^2(a-b) = (a+b)(a-b)^2,$$

což platí, neboť $a, b > 0$. Volbou $a := b, b := c$, resp. $a := c, c := a$ v právě dokázané nerovnosti dostaneme nerovnosti

$$\frac{b^3}{b^2+bc+c^2} \geq \frac{2b-c}{3} \quad \text{a} \quad \frac{c^3}{c^2+ca+a^2} \geq \frac{2c-a}{3}.$$

Sečtením tří dokázaných nerovností dostaneme požadovanou nerovnost.

Úloha 4.7

Kouma s Ňoumou si náramně užívali zimní počasí. Po včerejším běžkování dnes hráli na zamrzlém rybníku hokej. Z dobrého rozpoložení je vyrušil místní porybný, který přišel vysekávat díry do ledu. A chtěl je udělat zrovna na místě, kde si Kouma s Ňoumou odklidili sníh. Kluci ho prosili, jestli by je nemohl udělat někde jinde, ale porybný se zdál být neoblomný. Nakonec však svolil, ale jen v případě, pokud mu vyřeší příklad, který dostala jeho dceruška za úkol a se kterým si nevěděla ani ona, ani její tatík rady. Měla dokázat, že pro všechna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ platí, že $128 \mid \left(n^{n^{n^n}} - n^{n^n}\right)$.

Poznámka: $a^{b^{c^d}} = a^{\left(b^{\left(c^d\right)}\right)}$, *takže např.* $2^{3^4} = 2^{81}$.

Řešení:

Označme si $A := n^{n^{n^n}} - n^{n^n}$. Toto číslo si "co nejvíc" rozložíme na součin:

$$A = n^{n^n} \cdot \left[n^{\left(n^{n^n} - n^n\right)} - 1\right] = n^{n^n} \cdot \left\{n^{n^n \cdot \left[n^{\left(n^n - n\right)} - 1\right]} - 1\right\} = \\ = n^{n^n} \cdot \left\{n^{n^n \cdot \left[n^{n \cdot \left(n^{n-1} - 1\right)} - 1\right]} - 1\right\}$$

Potřebujeme tedy dokázat, že $2^7 \mid A$. Pro n sudé je $n \geq 4$ a zřejmě $2^7 \mid n^{n^n}$, takže $2^7 \mid A$. Pokud je n liché, vyjádřeme si $n = 4k \pm 1$, kde $k \in \mathbb{N}$. Pak

$$n^{n-1} - 1 = (4k \pm 1)^{2l} - 1 = \binom{2l}{0}(4k)^{2l}(\pm 1)^0 + \binom{2l}{1}(4k)^{2l-1}(\pm 1)^1 + \\ + \ldots + \binom{2l}{2l-1}(4k)^1(\pm 1)^{2l-1} + (\pm 1)^{2l} - 1 = 8m$$

pro vhodná $l, m \in \mathbb{N}$. Podobně

$$n^{n \cdot \left(n^{n-1} - 1\right)} - 1 = (4k \pm 1)^{8mn} - 1 = \binom{8mn}{0}(4k)^{8mn}(\pm 1)^0 + \\ + \binom{8mn}{1}(4k)^{8mn-1}(\pm 1)^1 + \\ + \ldots + \binom{8mn}{8mn-1}(4k)^1(\pm 1)^{8mn-1} + (\pm 1)^{8mn} - 1 = 32r$$

pro vhodné $r \in \mathbb{N}$. Stejným způsobem dostaneme

$$n^{n^n \cdot \left[n^{n \cdot \left(n^{n-1} - 1\right)} - 1\right]} - 1 = (4k \pm 1)^{32rn^n} - 1 = \ldots = 128s$$

pro vhodné $s \in \mathbb{N}$. Celkem jsme tedy pro n liché dostali $A = 128sn^{n^n}$, což bylo potřeba dokázat.