Vzorové řešení

3. série

Úloha 3.1

Jednou Matěj pouštěl se svými kamarády venku draka, málo se oblékl a nastydl. V horečkách ulehl do postele a zdály se mu bláznivé sny. V jednom z nich se hádaly rovnoběžky s různoběžkami o to, kdo je vznešenější, krásnější, ušlechtilejší a také užitečnější. Zdálo se, že tuto bitvu různoběžky vyhrály, když vykřikly argument: Existuje snad v rovině konečná množina bodů s vlastností, že pokud z ní vybereme libovolné dva různé body A a B, potom v této množině existují různé body C a D, kde $\{A, B\} \neq \{C, D\}$, takové, že AB je rovnoběžná s CD ?

Když se Matěj probral z blouznění, vyprávěl tento sen Liběnce. Ta mu dokázala, že taková konečná množina vskutku existuje, tudíž argument různoběžek se obrátil proti nim.

Dokázali byste to také?

Řešení:

Uvažme šestici bodů tvořících vrcholy pravidelného šestiúhelníka. Pokud vybereme za body A, B dva sousední vrcholy v tomto šestiúhelníku, potom za C, D můžeme volit krajní body protější strany. Pokud za A, B zvolíme krajní body kratší z úhlopříček, potom krajní body další kratší úhlopříčky, která je s naší disjunktní, jsou hledanými body C a D. A konečně, zvolíme-li za A, B krajní body nejdelší úhlopříčky, potom jedna ze stran je s ní rovnoběžná, tudíž body C, D vždy najdeme.

Úloha 3.2

Kouma s Ňoumou zrovna seděli u ohýnku, kde pálili natě po sklizni brambor. V popelu opékali brambory a už se těšili na tuto dobrůtku. Když však byly brambory hotové, našli jich chlapci pouze sedm. Začali se tedy hádat, kdo jich kolik dostane. Slyšel to pan Ňoumálek a rozsoudil je: Víc brambor dostane ten, kdo první dokáže, že některé z čísel $7, 77, 777, 7777, 77777, \ldots$ je dělitelné číslem 2007.

Dokázali byste to také?

Řešení:

Označme $a_1 = 7, a_2 = 77, a_3 = 777, \ldots, a_k = 77\ldots7$ (k sedmiček), atd. Připusťme, že žádné z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ není dělitelné 2007. To znamená, že každé z nich dává po dělení číslem 2007 zbytek z množiny $\{1, 2, 3, ..., 2006\}$. Tedy 2007 čísel může dávat 2006 různých zbytků, takže podle Dirichletova principu některá dvě z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ dávají stejný zbytek po dělení 2007. Označme větší z nich a_j a menší z nich a_i. Odtud dostáváme, že $2007|(a_j - a_i) = 77\ldots700\ldots0$ ($j - i$ sedmiček a i nul) $= a_{j-i} \cdot 10^i$. Ale $D(2007, 10) = 1$, tudíž $2007|a_{j-i}$.

Úloha 3.3

Když už Matěj během svého stonání přečetl všechny knížky Harryho Pottera, Bigglesse i Správných pětek, začal se strašlivě nudit. Naštěstí se akorát vrátila Liběnka ze školy a řekla mu, že si s ním půjde zahrát šachy. Matěje však klasické šachy nebavily, a tak začal vymýšlet různé ťulpachoviny. Liběnka mu zrovna dávala šach, když na ni Matěj vybafl s úlohou: Do šachovnice 8x8 polí jsou napsaná po řádcích čísla $1, 2, \ldots, 64$, tedy v prvním řádku jsou čísla $1, \ldots, 8$, ve druhém $9, \ldots, 16$ a v posledním $57, \ldots, 64$. Na šachovnici je rozmístěno 8 věží tak, že se žádné dvě neohrožují (věže se pohybují po řádcích a po sloupcích). Jakých hodnot může nabývat součet čísel polí, na kterých jsou věže umístěné?

Když se Liběnka zamyslela, Matěj zákeřně vyměnil figurky, aby se vymanil ze zapeklité situace.

Dokázali byste vyřešit příklad, který zadal Matěj Liběnce?

Řešení:

Zaveďme souřadnice polí tak, že sloupce očíslujeme od 1 do 8 a řádky $0, 8, 16, \ldots, 56$. Tím pádem je v poli o souřadnicích $[i, j]$ napsáno číslo $i + j$. Podmínka, že se věže vzájemně neohrožují, znamená, že v každém řádku a každém sloupci je právě jedna věž. To znamená, že v hledaném součtu bude vždy právě jednou každé z čísel $1, 2, \ldots, 8$ označující sloupce a každé z čísel $0, 8, \ldots, 56$ označující řádky. Tedy součet bude vždy roven

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 8 + 0 + 8 + 16 + \cdots + 56 = 260.$$

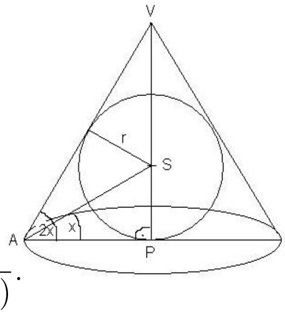
Úloha 3.4

Henry Klevr se vracel domů z práce a nesl si v ruce jakýsi drátěný model. Když ho Matěj s Liběnkou spatřili, nechali šachy být a běželi se podívat, co Henry zajímavého donesl.

Byl to model rotačního kužele, kterému byla vepsána koule. Této kouli byl opsán válec tak, že podstavy kužele a válce ležely ve stejné rovině. Matěj s Liběnkou se hned ptali, k čemu to slouží? Henry pravil, že jim to prozradí, až dokáží, že objemy kužele a válce se nemohou rovnat, a ještě až také určí, jaká je nejmenší možná hodnota podílu objemů kužele a válce.

Poradili byste si i s tímto příkladem?

Řešení:



Použijeme označení podle obrázku a nechť V_1 je objem kužele a V_2 je objem válce. Je zřejmé, že

$$V_2 = \pi \cdot r^2 \cdot 2r = 2 \cdot \pi \cdot r^3.$$

Dále $|AP| = \frac{r}{\mathrm{tg}(x)}$ a

$$|VP| = |AP| \cdot \mathrm{tg}(2x) = \frac{r}{\mathrm{tg}(x)} \cdot 2 \cdot \frac{\mathrm{tg}(x)}{1 - \mathrm{tg}^2(x)} = \frac{2r}{1 - \mathrm{tg}^2(x)}.$$

Použijeme substituci $a := \mathrm{tg}^2(x)$. Pak

$$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot |AP|^2 \cdot |VP| = \frac{\frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3}{a \cdot (1 - a)}.$$

Protože máme kužel opsaný kouli, je $0 < 2x < 90°$, z toho $0 < x < 45°$, takže $0 < \mathrm{tg}(x) < 1$, a tedy $0 < a < 1$. Nyní dokážeme požadovan0 tvrzení: Pokud by platilo $V_1 = V_2$, muselo by pro nějaké $a \in (0, 1)$ platit

$$\frac{1}{3a(1-a)} = 1, \quad \text{tj.} \quad 3a^2 - 3a + 1 = 0.$$

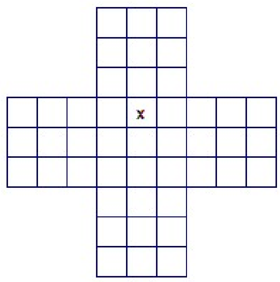
Protože diskriminant této rovnice je záporný, tato rovnice nemá reálné kořeny, takže V_1 nemůže být rovno V_2.

Dále $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{3a(1-a)}$, takže minimální hodnota podílu $\frac{V_1}{V_2}$ nastane pro maximum výrazu $a(1-a)$ pro $a \in (0, 1)$. Protože $a(1-a) = -(a-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$, nastane maximum tohoto výrazu pro $a = \frac{1}{2}$, přičemž hodnota maxima je $\frac{1}{4}$. Tudíž minimální hodnota podílu $\frac{V_1}{V_2}$ je $\frac{1}{3 \cdot \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$.

Úloha 3.5

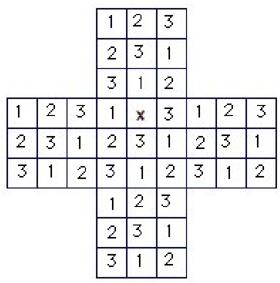
Když se Kouma vrátil večer domů, zašel si zahrát Solitaire. Na každém políčku hrací plochy kromě centrálního je figurka. Hrát se může tzv. skákáním buď v horizontálním nebo ve vertikálním směru. Skákání spočívá v tom, že figurka ze stávajícího políčka přeskočí v jednom z výše uvedených směrů přes jednu figurku na volné políčko, přičemž přeskočenou figurku odstraníme z hrací plochy.

Je možné skončit hru s jedinou figurkou nacházející se na políčku označeném křížkem?



Řešení:

Očíslujme políčka hrací plochy podle obrázku. Nechť ξ udává počet figurek, které jsou na políčkách s čísly 1 a 2. Po každém skoku se ξ buď zmenší o 2, nebo se nezmění. Protože na začátku je $\xi = 30$, bude ξ celou dobu sudé. Takže hru není možné skončit s jedinou figurkou na políčku označeném křížkem, protože za této situace by bylo $\xi = 1$, což není možné.



Úloha 3.6

Hmm, to Ňouma neměl na hry ani pomyšlení. Musel ještě udělat úkoly do školy. Měl najít všechna řešení rovnice $(n+1)^k - 1 = n!$, kde $n, k \in \mathbb{N}$.

Pomozte Ňoumovi vypočítat tento příklad.

Řešení:

Snadno lze zjistit, že pro $n \leq 4$ jsou všechna řešení (n, k) z množiny $\{(1,1), (2,1), (4,2)\}$. Předpokládejme tedy, že $n > 4$. Pak $n! + 1 > n + 1$, tudíž $k > 1$. Je-li n liché, je $n + 1$ sudé, ale $n! + 1$ je liché, takže pro lichá $n > 4$ nejsou žádná řešení.

Nechť n je sudé. Číslo n tedy musí být složené, a pak $n|(n-1)!$ Podle binomické věty máme

$$(n+1)^k - 1 = n^k + \binom{k}{1} n^{k-1} + \cdots + \binom{k}{k-2} n^2 + kn.$$

Protože předpokládáme, že $n > 4$, je $n!+1 > n+1$, takže musí být $k > 1$. Na pravé straně poslední rovnosti jsou tedy alespoň dva sčítance (zejména člen kn), tudíž následující úvaha je korektní. Vydělíme-li obě strany upravené rovnice ze zadání číslem n, dostaneme rovnost

$$(n-1)! = n\left[n^{k-2} + \binom{k}{1} n^{k-3} + \cdots + \binom{k}{k-2}\right] + k.$$

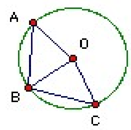
Z toho plyne, že $n|k$. Tzn., že $k \geq n$, a potom $(n+1)^k \geq (n+1)^n > n! + 1$. Takže úloha nemá žádná řešení ani pro sudá $n > 4$.

Úloha 3.7

Henry se večer vydal do hospůdky povykládat s místními u pěnivého moku nejmenované značky hloupětínského piva. Když už měli pánové něco vypito, rozhodli se, že si půjdou zahrát kulábr, což je hra podobná našemu kulečníku, akorát se hraje na kruhovém kulečníkovém stole bez děr. Henry samozřejmě vyhrával a chlapy už to přestávalo bavit. A tak mu vymysleli zapeklitý úkol. Prý si s nimi další hru může zahrát až tehdy, co dokáže, že pokud koule projde nějakým bodem na stole třikrát, projde jím nekonečně mnohokrát (předpokládejte, že koule se od mantinelů stolu odráží tak, že úhel odrazu je stejný jako úhel dopadu a že se koule po uvedení do pohybu již nikdy nezastaví).

Podaří se vám dokázat i tento příklad?

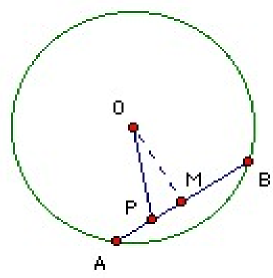
Řešení:



Mějme označení podle prvního obrázku. Předpokládejme, že AB a BC jsou dvě tětivy, jimiž bezprostředně po sobě projde koule na své cestě. Pak podle zákona o úhlu dopadu a odrazu platí $|\angle ABO| = |\angle CBO|$. Ale trojúhelníky OAB a OBC jsou rovnoramenné, mají stejnou stranu i úhel, takže jsou shodné. Pak $|AB| = |BC|$. Tudíž všechny tětivy, jež jsou součástí cesty koule, mají stejnou délku, označme si ji d.

Pokud d je průměr kruhového stolu, koule se neustále po tomto průměru pohybuje tam a zpět, takže každým bodem své cesty projde nekonečně mnohokrát.

Dokážeme, že každým bodem $P \neq O$ ležícím na kruhovém stole vedou nejvýše dvě tětivy délky d. (Pokud koule někdy projde středem O, bude se neustále pohybovat po nějakém průměru stolu.) Každá tětiva v kruhu je jednoznačně určena umístěním svého středu M. Všechny středy tětiv délky d mají podle Pythagorovy věty od středu O stejnou vzdálenost $u = \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}}$.



Má-li tětiva délky d procházet bodem P, musí být vzdálenost středu M této tětivy od bodu P opět podle Pythagorovy věty rovna $v = \sqrt{|OP|^2 - u^2}$. (Pokud pod touto odmocninou dostaneme záporné číslo, je $|OP| < |OM|$, takže neexistuje tětiva délky d procházející bodem P.) Z předcházejících úvah tedy plyne, že M musí ležet na kružnici se středem O a poloměrem u a také na kružnici se středem P a poloměrem v.

Dvě kružnice s různými středy se protínají nejvýše ve dvou bodech, takže existují nejvýše dvě možná místa pro bod M, tudíž existují nejvýše dvě různé tětivy délky d procházející bodem P. Projde-li tedy koule nějakým bodem P třikrát, musela alespoň dvakrát projet po stejné tětivě AB (buď ve stejném směru, nebo v opačném). Protože po průjezdu konkrétní tětivou lze jednoznačně určit dráhu, kterou koule projela před tímto průjezdem, a také je jednoznačně určena dráha, po které koule pojede, musí se koule dále neustále pohybovat po dráze, kterou projela mezi prvním a druhým průjezdem tětivy AB. To znamená, že koule projde bodem P nekonečně mnohokrát.