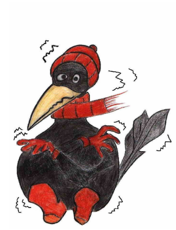
Vzorové řešení

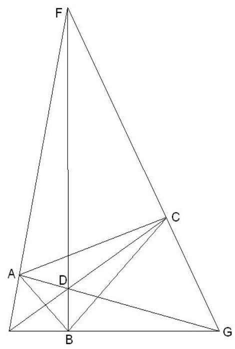
2. série



Úloha 2.1

Lenošínský hvězdář Marko Perník objevil na nebi zajímavé souhvězdí. Tvoří ho šestice hvězd Ajda, Bajda, Cajda, Dory, Fory a Gory. Marko si při pozorování všimnul, že Dory leží ve středu kružnice vepsané trojúhelníku, který má za vrcholy hvězdy Ajda, Bajda a Cajda. Dále Fory je středem kružnice připsané ke hvězdné straně Ajda-Cajda a Gory je středem kružnice připsané ke hvězdné straně Bajda-Cajda. Dále v tomto hvězdném trojúhelníku platí, že poměr velikostí úhlů při hvězdách Ajda a Cajda je roven poměru velikostí úhlů při hvězdách Bajda a Ajda, který je roven 2. Pomozte Markovi dokázat, že hvězdné trojúhelníky Ajda-Bajda-Cajda a Dory-Fory-Gory jsou podobné.

Řešení:



Šestici hvězd si zkráceně označme A, B, C, D, F, G. Snadno lze vidět, že trojice bodů B, D, F, resp. A, D, G leží na jedné přímce, neboť D i F leží na ose úhlu ABC. Podobně D i G leží na ose úhlu BAC. Dále označme v trojúhelníku ABC úhly obvyklým způsobem: α, β, γ. Pak:

$$|\angle ADC| = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}.$$

Dále pak z úhlů v trojúhelnících dostáváme:

$$2 \cdot |\angle FAD| = |\angle BAD| + |\angle DAC| + |\angle CAF| + (180^\circ - |\angle FAB|) = 180^\circ,$$

tudíž $|\angle FAD| = 90^\circ$. Podobně $|\angle FCD| = 90^\circ$, takže

$$|\angle AFC| = 360^\circ - |\angle ADC| - |\angle FAD| - |\angle FCD| = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}.$$

Dále uvažme trojúhelník AGF. Z předchozích výpočtů je jasné, že

$$|\angle AGF| = 90^\circ - \alpha/2 - \gamma/2 = \beta/2.$$

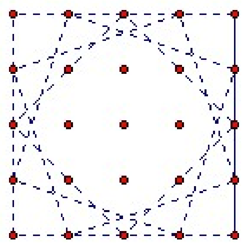
Analogicky dostaneme, že $|\angle BFG| = \alpha/2$.

Nyní využijeme faktu plynoucího ze zadání, totiž že $\gamma = \alpha/2$ a $\alpha = \beta/2$. Pak $|\angle DGF| = |\angle AGF| = \alpha$ a $|\angle DFG| = |\angle BFG| = \gamma$. Takže trojúhelníky ABC a GDF jsou podobné podle věty *uu*.

Úloha 2.2

Kouma přišel jednoho dne za Ňoumou se zajímavým příkladem. Měl danou čtvercovou síť s $(k+1)\times(k+1)$ body, kde k je přirozené číslo. Ňouma měl určit, kolik existuje čtverců s vrcholy v těchto bodech. Dokážete to také?

Řešení:



Nejdříve si musíme uvědomit, kolik existuje čtverců s vrcholy na obvodu čtvercové sítě s $(n+1)\times(n+1)$ body. Takových čtverců je evidentně podle obrázku právě n. Těchto čtvercových sítí, jež jsou součástí zadané čtvercové sítě a jejichž strany jsou rovnoběžné se stranami zadané čtvercové sítě, je $(k+1-n)^2$. Takže hledaný počet čtverců je

$$k\cdot 1^2+(k-1)\cdot 2^2+\ldots+1\cdot k^2=\sum_{i=1}^{k}(k+1-i)\cdot i^2=$$

$$=(k+1)\cdot\sum_{i=1}^{k}(i^2)-\sum_{i=1}^{k}(i^3)=$$

$$=\frac{(k+1)[k(k+1)(2k+1)]}{6}-\frac{[k^2(k+1)^2]}{4}=\frac{k(k+1)^2(k+2)}{12}.$$

Úloha 2.3

Matěj s Liběnkou a dalšími kamarády vyhráli na závodech hlavní cenu - třípatrový oříškový dort pokladený čerstvým ovocem, zalitý želatinou, promazaný lahodným vanilkovým krémem a ozdobený loupanými mandličkami. Když si tuto slast chtěli rozdělit, zavelel Matěj, že každý z nich si musí vybrat různé přirozené číslo tak, aby každý z týmu mohl dostat tu část dortu, která odpovídá převrácené hodnotě jeho čísla. Dokažte, že takto mohli vždy rozdělit celý dort, tedy dokažte, že pro každé $n>2$ existuje n různých přirozených čísel takových, že součet jejich převrácených hodnot je roven jedné.

Řešení:

Jistě platí $1/2+1/3+1/6=1$, takže máme čísla 2, 3, 6 a úloha je pro $n=3$ dokázána. Dále pro všechna $n\in\mathbb{N}$ je

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=1.$$

Pokud v tomto výrazu druhé $1/2^n$ nahradíme $(1/2+1/3+1/6)\cdot 1/2^n$, dostaneme součet $(n+3)$ různých členů:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{3\cdot 2^n}+\frac{1}{3\cdot 2^{n+1}}=1,$$

takže pro všechna $k>3$ máme k různých čísel vyhovujících zadání:

$$2,4,8,\ldots,2^{k-3},2^{k-2},3\cdot 2^{k-3}\text{ a }3\cdot 2^{k-2}.$$

Úloha 2.4

Desetinásobek druhé mocniny věku sestřičky Koumy je o 4 větší než rozdíl trojnásobku druhé mocniny věku Ňoumova brášky a sedminásobku součinu věku Koumovy sestřičky a Ňoumova brášky. Dokážete určit věk Koumovy sestřičky a Ňoumova brášky?

Řešení:

Nechť x je věk Koumovy sestřičky a y je věk Ňoumova brášky. Potom ze zadání dostáváme rovnici

$$10x^2 - 4 = 3y^2 - 7xy.$$

Úpravou potom dostaneme, že

$$10x^2 - 3y^2 + 7xy = 4.$$

Rozložme levou stranu na součin a dostaneme rovnici

$$(10x - 3y)(x + y) = 4.$$

V oboru přirozených čísel můžeme číslo 4 rozložit na součin třemi způsoby: $1 \cdot 4, 2 \cdot 2$ a $4 \cdot 1$. Stačí uvažovat přirozené rozklady, protože $x + y$ musí být kladné. Dostáváme tak tři soustavy rovnic o neznámých x a y. Z těchto soustav má řešení v oboru přirozených čísel pouze soustava

$$10x - 3y = 1, \quad x + y = 4.$$

Odtud dostáváme $x = 1$, $y = 3$.

Koumova sestřička má tedy rok a Ňoumův bráška tři roky.

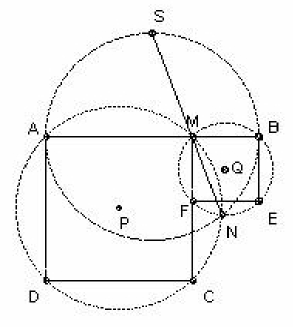
Úloha 2.5

Hned ze začátku školního roku se na Matěje s Liběnkou vrhli ve škole učitelé jako... No však víte, jak se to říká. Úkol za úkolem. A v matice obzvlášť. Už jim šla hlava kolem, zrovna naposledy měli zadaný tento příklad, co příklad, přímo dvojpříklad: Bod M je libovolný vnitřní bod úsečky AB. Označme $AMCD$ a $MBEF$ čtverce ležící ve stejné polorovině určené přímkou AB. Dále označme N průsečík kružnic opsaných těmto čtvercům, $M \neq N$.

1. Dokažte, že se přímky AF a BC protínají v bodě N.
2. Dokažte, že přímka MN prochází pevným bodem, nezávislým na volbě bodu M.

Řešení:

Nyní provedeme každý z důkazů, jež jsou požadovány v zadání tohoto příkladu, zvlášť:



1. Pokud $|AM| = |MB|$, je $C = F = N$, takže přímky AF a BC se protínají v jednom bodě. Dále BÚNO můžeme předpokládat, že $|AM| > |MB|$. Dokažme nejprve, že body A, F, N a B, N, C jsou kolineární (tzn. leží na jedné přímce). $|\angle ANM| = |\angle ACM| = 45°$ (využili jsme vlastnosti obvodového úhlu). Ze stejného důvodu platí, že $|\angle FNM| = |\angle FEM| = 45°$. Tedy A, F, N jsou kolineární. Podobně pro body B, N, C: $|\angle BNM| = |\angle BEM| = 45°$ a $|\angle CNM| = 180° - |\angle CAM| = 135°$, takže také B, N, C jsou kolineární. Z toho je již zřejmé, že se přímky AF a BC protínají v bodě N.

2. Protože $|\angle ANM| = |\angle BNM| = 45°$, máme $|\angle ANB| = 90°$, tedy N leží na Thaletově kružnici sestrojené nad úsečkou AB. Označme S druhý průsečík přímky MN s touto kružnicí. Potom $|\angle ANS| = |\angle BNS| = 45°$. Protože stejně velké úhly $|\angle ANS|$ a $|\angle BNS|$ jsou obvodové úhly příslušné obloukům AS a BS, je $|AS| = |BS|$, tudíž trojúhelník ABS je rovnoramenný. Trojúhelník ABS je nezávislý na volbě bodu M, přímka MN tedy vždy prochází pevným bodem S.

Úloha 2.6

Ani Kouma s Ňoumou se ve škole nenudili. Měli za úkol dokázat, že existuje 2007 navzájem různých přirozených čísel takových, že součet libovolných dvou z nich je dělitelný jejich rozdílem. Pomozte to Koumovi a Ňoumovi dokázat.

Řešení:

Dokažme matematickou indukcí, že existuje libovolných n takových čísel, jež splňují podmínku obsaženou v zadání:

1. Pro $n = 2$ tvrzení zřejmě platí, například 1 a 2.

2. Nechť $n \geq 2$ a předpokládejme, že existuje n přirozených čísel s danou vlastností. Označme je $a_1, \ldots, a_n$. Položme:

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \\ b_1 &= a_1 + b_{n+1} \\ b_2 &= a_2 + b_{n+1} \\ &\ldots \\ b_n &= a_n + b_{n+1}. \end{aligned}$$

Dokažme, že množina $\{b_1, ..., b_{n+1}\}$ splňuje námi dokazovanou vlastnost: Nechť $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ jsou navzájem různá přirozená čísla a nechť např. $a_i < a_j$. Potom

$$b_i - b_j = a_i - a_j$$
$$b_i + b_j = a_i + a_j + 2 \cdot b_{n+1} = a_i + a_j + 2 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_i \cdot \ldots \cdot a_j \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Z indukčního předpokladu víme, že $a_i + a_j$ je dělitelné $a_i - a_j$. Protože $2 \cdot a_i = (a_i - a_j) + (a_i + a_j)$, je $2 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_i \cdot \ldots \cdot a_j \cdot \ldots \cdot a_n$ také dělitelné $a_i - a_j$. Z toho plyne, že $b_i + b_j$ je dělitelné $b_i - b_j$. Dále

$$b_i - b_{n+1} = a_i, b_i + b_{n+1} = a_i + 2 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_i \cdot \ldots \cdot a_n,$$

takže $b_i - b_{n+1} \mid b_i + b_{n+1}$.

Dokázali jsme tedy obecnější tvrzení, než je v zadání tohoto příkladu. Existuje nejen 2007-prvková množina čísel splňujících zadání, ale dokonce n-prvková pro všechna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Úloha 2.7

Lenošínsko-hloupětínského srazu chytrých hlav se zúčastnilo 289 nejlepších lenošínských a hloupětínských matematiků. Každý den byli rozděleni do 17 skupin po 17 matematicích tak, aby žádní dva nebyli spolu vícekrát v jedné skupince. Určete nejvyšší počet dní, po které mohla tato konference probíhat.

Řešení:

Každý den byl určitý matematik ve skupině s 16 různými matematiky. Dohromady měl tento matematik do skupin k dispozici 288 jiných matematiků, takže konference nemohla trvat déle než 288/16 dní = 18 dní.

Přímo ukážeme, jaké rozdělení matematiků do skupin bylo během celé konference. Označme matematiky (m, n), kde $0 \leq m,\ n \leq 16$. Nechť pro $0 \leq d,\ s \leq 16$ byla d-tý den skupina

$$s = \{(0, s), (1, s + d), (2, s + 2d), \ldots, (16, s + 16d)\},$$

přičemž u všech těchto čísel uvažujeme pouze zbytky po dělení 17. Poslední den byly tyto skupiny:

$$\begin{gathered}\{(0,0),(0,1),\ldots,(0,16)\},\\ \{(1,0),(1,1),\ldots,(1,16)\},\\ \{(2,0),(2,1),\ldots,(2,16)\},\\ \ldots\\ \{(16,0),(16,1),\ldots,(16,16)\}.\end{gathered}$$

Nejprve musíme dokázat, že každý den skupiny zahrnovaly všechny matematiky. Poslední den to zřejmě platilo, uvažujme tedy d-tý den pro $0 \leq d \leq 16$. Chceme tedy v tento den najít skupinu s pro matematika (a, b), kde $0 \leq a, b \leq 16$ jsou libovolná. Zvolme s jako zbytek po dělení čísla $b - ad$ číslem 17. Pak $(a, b) = (a, s + ad)$, takže matematik (a, b) byl ve skupině s. Protože skupiny každý den obsahovaly 289 matematiků a každý matematik byl v nejméně jedné skupině, byl libovolný matematik právě v jedné skupině.

Ještě je potřeba dokázat, že žádní dva matematici spolu nebyli vícekrát v jedné skupině. Uvažujme matematiky (a, b) a (A, B). Pokud $a = A$, oba byli spolu pouze poslední den. Předpokládejme tedy, že $a \neq A$. Zvolme $d \in \{0, ..., 16\}$ tak, že $(a - A) \cdot d$ a $(b - B)$ dávají stejný zbytek po dělení 17. Protože 17 je prvočíslo a $(a - A)$ je nesoudělné se 17, takové d existuje. Dále zvolme $s \in \{0, ..., 16\}$, které dává stejný zbytek po dělení 17 jako $b - ad$. Pak

$$(a, b) = (a, s+ad) \text{ a } (A, B) = (A, b-(a-A)\cdot d) = (A, b-ad+Ad) = (A, s+Ad),$$

takže oba matematici byli dne d ve skupině s.

Dokázali jsme, že každá dvojice matematiků se alespoň jednou setkala, takže bylo alespoň $\binom{289}{2} = 289 \cdot 288/2$ setkání. Navíc $289 \cdot 288/2$ setkání mohlo nastat, právě když se každá dvojice setkala právě jednou. Ale protože bylo celkem 18 dní, každý den 17 skupin a v každé skupině bylo 17 matematiků, celkem nastalo přesně $18 \cdot 17 \cdot \binom{17}{2} = 289 \cdot 288/2$ setkání. Tudíž každá dvojice se setkala právě jednou, což bylo potřeba dokázat.