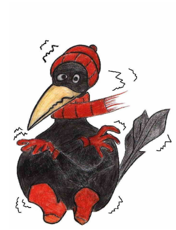
Vzorové řešení

1. série



Úloha 1.1

V letních vedrech se dva lenošínští kamarádi Kouma Ňoumálek a Ňouma Koumálek vypravili koupat na tamní přehradu Faulín. Kouma si všiml, že délka hráze byla druhou mocninou počtu labutí hnízdících v rákosí na jednom břehu přehrady. Ňouma dodal, že pokud by vymazali poslední dvě cifry čísla vyjadřujícího délku hráze, dostali by druhou mocninu počtu rybářů, kteří toho dne u přehrady zkoušeli štěstí. Navíc délka hráze nebyla dělitelná číslem deset. Po návratu domů se Kouma podělil o tento zajímavý poznatek s rodiči. Bohužel si však nemohl vzpomenout, kolik labutí a rybářů u přehrady bylo. I přesto dokázal pan Ňoumálek určit všechny možné délky přehradní hráze. Kouma nevěřícně zíral a dodal, že správná byla ta největší z těchto možností. Dokážete určit délku hráze?

Řešení:

Nechť h je hledaná délka hráze. Pak existují přirozená čísla l, r, s taková, že $h = l^2 = 100r^2 + s$, kde l je počet labutí, r je počet rybářů, $99 \geq s \geq 1$ a $10 \nmid s$.

Protože $l^2 - 100r^2 \geq 1$, je $l > 10r$ (tady využíváme toho, že $10 \nmid h$), dostáváme následující nerovnost: $99 \geq l^2 - (10r)^2 \geq (10r+1)^2 - (10r)^2 = 20r + 1$. Hledané číslo h má být největší, proto $r = 4$. Pak $s = l^2 - (10r)^2 = (l+40)(l-40)$. Protože $99 \geq s \geq 1$, je $l = 41$. Odtud dostáváme, že délka hráze je $41^2 = 1681$.

Úloha 1.2

Když se Matěj jednoho deštivého dne začetl do Velké knihy hloupětínských pohádek, objevil tam jednu velice zajímavou. Zlý čaroděj Zlovous Zlovousý uvěznil princeznu Ťupkulupku ve zvláštním žaláři. Měl tvar krychle o délce hrany n a byl rozdělen na n^3 stejných krychlových místností o délce hrany 1, n přitom bylo liché přirozené číslo větší než 1. Princ Lupkoťapkal se vydal princeznu osvobodit. Do žaláře šlo vstoupit pouze jeho vrcholovými místnostmi. V momentě, kdy princ do žaláře vstoupil, nacházela se princezna v místnosti ležíci uprostřed celého žaláře. Každé dvě sousední místnosti byly spojeny dvojicí dveří (za sousední místnost se považovaly ty, které měly společnou stěnu). Jedněmi dveřmi se do místnosti vcházelo a druhými vycházelo. Všechny dveře se v pravidelných intervalech otevíraly najednou a pouze na chvíli, přičemž princ i princezna vždy možnosti přemístit se do sousední místnosti využili. Mohla mít tato pohádka happy end, tedy mohli se princ s princeznou setkat v téže místnosti?

Řešení:

Protože n je liché, $n > 1$, můžeme psát $n = 2k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$. Místnosti žaláře si můžeme představit jako body v prostoru, kde body odpovídající vrcholovým místnostem žaláře mají souřadnice $[1, 1, 1]$, $[1, 1, n]$, $[1, n, 1]$, $[n, 1, 1]$, $[n, n, 1]$, $[n, 1, n]$, $[1, n, n]$, $[n, n, n]$ a bod odpovídající prostřední místnosti žaláře tudíž bude mít souřadnice $[k+1, k+1, k+1]$. Přesun do sousední místnosti tedy odpovídá zvětšení nebo zmenšení právě jedné souřadnice o 1 u bodu, který odpovídá místnosti, ve které se princ nebo princezna právě nachází. Tudíž je zřejmé, že při přesunu do sousední místnosti se vždy změní parita součtu všech tří souřadnic (tzn. byl-li součet souřadnic před přesunem sudý, po přesunu bude lichý a byl-li lichý, po přesunu bude sudý). Navíc protože n je liché, je součet souřadnic u všech vrcholových místností, ve kterých může princ začínat, lichý. Nyní budeme muset rozlišit dva případy:

1. k je liché: Pak součet souřadnic u prostřední místnosti bude sudý. Princ se tedy s princeznou nemůže setkat, protože se vždy budou nacházet v místnostech s rozdílnou paritou součtu souřadnic. Nemohou se potkat ani během přesunu, neboť v případě, kdy si navzájem vymění místnosti, podle zadání využijí různé dveře.

2. k je sudé: Součet souřadnic u prostřední místnosti bude lichý, takže princ i princezna budou vždy v místnostech se stejnou paritou součtu souřadnic. Zbývá nám ještě dokázat, že se můžou potkat v jedné místnosti. Pokud princ půjde nejkratší cestou do prostřední místnosti, dostane se tam po $3k$ přesunech, což je sudé číslo. Jestliže princezna bude neustále opakovat přesun do sousední místnosti a pak nazpět do prostřední, bude se v prostřední místnosti nacházet vždy po sudém počtu přesunů. Takže se oba jistě mohou setkají po $3k$ přesunech.

Pohádka tedy pro $n = 4l+1$ ($l \in \mathbb{N}$) mohla mít happy end a pro $n = 4l-1$ ($l \in \mathbb{N}$) nikoliv.

Úloha 1.3

Během letních měsíců jezdí Lenošínští i Hloupětínští rádi na dovolenou. Lenošínští v touze po opalování na pláži putují do Hloupětína, zatímco Hloupětínští se raději vydávají objevovat krásy přírody do hor v okolí Lenoší-na. Je to již dlouho, co mezi oběma městy pendluje autobus Bouca, který rád sveze každého, kdo si dokáže poradit s jednoduchou úlohu. Pomozte Matějovi a Liběnce vyřešit příklad, který jim Bouca zadal, když se chtěli vydat do Lenošína. Měli dokázat, že pokud p a $2^p + p^2$ jsou prvočísla, potom i $5p + 82$ je prvočíslo. Dokážete to i vy?

Řešení:

Označme $q = 2^p + p^2$, $r = 5p + 82$. Dále budeme tuto úlohu řešit v závislosti na hodnotách prvočísla p.

1. $p = 2$: Potom $q = 8$, takže implikace v zadání platí, protože není splněn předpoklad.

2. $p = 3$: Pak $q = 17$ a $r = 97$, což vyhovuje.

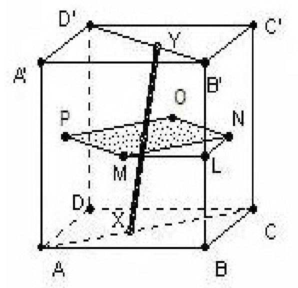
3. $p > 3$: Zbylá prvočísla jsou lichá a dávají zbytek 1 nebo -1 po dělení třemi. Protože p je liché, můžeme ho psát ve tvaru $p = 2k + 1$, kde $k \in \mathbb{N}$. Potom $2^{2k+1} = (3 - 1)^{2k+1}$, což se podle binomické věty rovná $3s+(-1)^{2k+1} = 3s-1$ pro nějaké přirozené číslo s. Dále $p^2 = (3t\pm1)^2 = 3(3t^2\pm2t)+1 = 3z+1$ pro nějaké přirozené z. Pak $q = 3s-1+3z+1 = 3(s + z)$, takže q je jistě dělitelné třemi, a tedy není prvočíslo. Opět tedy není splněn předpoklad implikace v zadání.

Tvrzení tedy platí pro všechna prvočísla p.

Úloha 1.4

Také obyvatelé Lenošína museli před cestou do Hloupětína vyřešit jeden příklad. A tak se Koumovi Ňoumálkovi a Ňoumovi Koumálkovi přihodilo, že se potýkali s touto úlohou: "Nechť $ABCDA'B'C'D'$ je krychle. Nechť X je libovolný bod úsečky AC a Y je libovolný bod úsečky $B'D'$. Nalezněte množinu všech středů úsečky XY." Dokázali byste se podobně jako Kouma s Ňoumou dostat do Hloupětína?

Řešení:



Hledanou množinou je čtverec $MNOP$ s vrcholy ležícími ve středech stěn $ABB'A'$, $BCC'B'$, $CDD'C$, $ADD'A'$. Nyní naše tvrzení dokážeme.

Položme nejprve bod Y do bodu B'. Pokud se bod X pohybuje po úsečce AC, střed úsečky XY leží na střední příčce trojúhelníku AYC, která je rovnoběžné se stranou AC. Střední příčkou trojúhelníku AYC je úsečka MN (v obrázku). Pokud bod Y umístíme do D' (resp. X do A, X do C), dostáváme další úsečky obrysu čtverce $MNOP$. Pokud nyní vezmeme libovolný bod Y úsečky $B'D'$ a libovolný bod X úsečky AC, potom střed strany XY leží na střední příčce trojúhelníku AXY, a protože je tato příčka rovnoběžná se stranou AC a druhý krajní bod této příčky leží na straně MP, leží střed XY ve čtverci $MNOP$.

Dokažme nyní, že libovolnému bodu S čtverce $MNOP$ odpovídá alespoň jedna úsečka XY taková, že X leží na AC, Y leží na $B'D'$ a S je středem XY. Pokud S leží na hranici čtverce, hledaná úsečka XY jistě existuje. Pokud bod S leží uvnitř čtverce $MNOP$, veďme bodem S rovnoběžku s $B'D'$. Pak tato rovnoběžka jistě protne stranu MN v bodě T. Pokud T spojíme s bodem B', dostaneme jistě přímku různoběžnou s AC (viz předchozí odstavec). Průsečík $B'T$ a AC označme X. Opět XS je jistě přímka různoběžná s $B'D'$

(z předchozí konstrukce je jasné, že body B', D', T, S a X leží v jedné rovině) a nechť Y je průsečík XS a úsečky $B'D'$. Zřejmě S je středem úsečky XY (vždyť ST je střední příčka trojúhelníku $XB'Y$).

Dokázali jsme tedy, že hledanou množinou bodů je čtverec $MNOP$.

Úloha 1.5

To si takhle Matěj s Liběnkou jednoho krásného letního dne lebedili v houpacích sítích, zavěšených mezi kmeny statných ořešáků, které jim ještě navíc poskytovaly stín před dotírajícím sluncem, a hráli hru polynomíkování. Matěj vždycky zadal nějakou vlastnost a Liběnka hledala všechny polynomy, které zadanou vlastnost mají. Tak například dal Matěj Liběnce za úkol najít všechny polynomy $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ (tedy polynomy proměnné x s reálnými koeficienty), pro něž platí, že $P(x^2) = (P(x))^2 - 2x$. Pomozte je Liběnce najít.

Nápověda: Polynomem s reálnými koeficienty je například $P(x) = x^2 + 5x + 3$. Potom $P\left(x^2\right) = \left(x^2\right)^2 + 5x^2 + 3 = x^4 + 5x^2 + 3$. Samotná reálná čísla jsou také polynomy, kterým se říká konstantní polynomy.

Řešení:

Nejdříve najděme všechny polynomy tvaru $ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, splňující zadání. Musí platit, že

$$ax^2 + b = a^2x^2 + 2abx + b^2 - 2x.$$

Z toho dostáváme rovnice

$$a(a-1) = 0, \quad 2ab - 2 = 0, \quad b(b-1) = 0.$$

Pak pokud $a = 0$ nebo $b = 0$, není splněna druhá rovnice, takže jediným řešením těchto tří rovnic je $a = b = 1$. Takže jediný polynom stupně nejvýše 1 splňující zadání je polynom $P(x) = x + 1$. Dále indukcí vzhledem ke stupni polynomu dokážeme, že polynom $x + 1$ je jediný polynom vyhovující zadání:

1. Pro polynomy stupně 0 a 1 jsme to udělali výše.

2. Předpokládejme, že ze všech polynomů s reálnými koeficienty stupně nejvýše n ($n \geq 1$) vyhovuje rovnici $P(x^2) = [P(x)]^2 - 2x$ pouze polynom $x + 1$. S využitím tohoto předpokladu dokažme, že ze všech polynomů stupně nejvýše $n + 1$ vyhovuje dané rovnici pouze polynom $x + 1$. Stačí nám uvažovat polynomy stupně $n + 1$ (tedy polynomy tvaru $a_{n+1}x^{n+1} + Q(x)$, kde $Q(x)$ je polynom stupně nejvýše n s vedoucím členem a_kx^k ($k \leq n, a_k \neq 0$) a $a_{n+1} \neq 0$), protože na polynomy nižšího stupně můžeme rovnou použít předpoklad. Zde nemáme zahrnutou možnost $Q(x) = 0$. V tomto případě máme zkoumat polynom

$a_{n+1}x^{n+1}$ - ten zřejmě nesplňuje rovnici ze zadání. Dosazením polynomu $a_{n+1}x^{n+1} + Q(x)$ do rovnice dostáváme

$$a_{n+1}x^{2n+2} + Q(x^2) = a_{n+1}^2 x^{2n+2} + 2a_{n+1}x^{n+1}Q(x) + [Q(x)]^2 - 2x.$$

Porovnáním koeficientů u x^{n+1+k} dostaneme $0 = 2a_{n+1}a_k$, což je spor, neboť $a_{n+1} \neq 0$ a $a_k \neq 0$. Tudíž mezi polynomy stupně nejvýše $n+1$ vyhovuje dané rovnici pouze polynom $x+1$.

Indukce je hotova, takže Liběnka Matějovi odpoví, že dané rovnici vyhovuje jediný polynom $x+1$.

Úloha 1.6

Za dávných časů, když ještě v Lenošíně panovala doba uvolněných mravů, rozhodl se s tím tehdejší panovník něco udělat a promluvil ke svému lidu: "Veleváženi mužové, v našem městě se děje něco strašného, některé ženy jsou svým manželům nevěrné. To nemůžeme tolerovat. Každý muž musí zapojit své mozkové závity, aby zjistil, zda mezi nevěrnými není i jeho manželka. Kdo zjistí, že jeho choť nevěrná je, co nejdříve ji vyžene. Abychom však odradili od nevěry ty ženy, které zatím sekají dobrotu, bude vyhánění těch nevěrných probíhat vždy najednou a před celým městem. Za tímto účelem bude od zítřka každý večer v 5 hodin na krátkou chvíli otevřena východní brána města."Každý muž věděl o každé ženě krom své vlastní, zda je věrná, či ne, a také věděl, že i všichni ostatní muži jsou podobně "informováni". Ve městě bylo n nevěrných manželek, nebyla možná polygamie a nikdo by si nedovolil porušit nařízení panovníka. Kolikátý den po tomto proslovu byly všechny nevěrné manželky z města vyhnány?

Řešení:

Podívejme se, co se bude dít ve městě v závislosti na počtu nevěrných manželek.

1. $n = 1$: Je-li ve městě jedna nevěrná manželka, její manžel ví, že všechny ostatní jsou věrné. Jediný, kdo může být nevěrný, je jeho žena, proto ji hned první den vyžene. (Využili jsme toho, že každý manžel ví, že alespoň jedna manželka je nevěrná.)

2. $n = 2$: Označme nevěrné manželky A, B. Manžel A ví, že je B nevěrná svému manželovi. O své manželce však neví, zda mu je věrná, či ne. První den se proto nic nestane. Pokud by mu ale jeho manželka byla věrná, dovtípil by se manžel ženy B, že je nevěrná jen ta jeho (viz $n = 1$), proto by ji hned první den vyhnal. To se však nestalo, proto si oba manželé uvědomí, že kromě té ženy, o jejíž nevěře vědí, musí být nevěrná ještě další žena, což může být jen ta jejich. Proto je hned druhý den vyženou. (Využili jsme toho, že všichni manželé o sobě navzájem vědí, že jsou informováni o tom, že ve městě alespoň jedna nevěrná žena je.)

3. $n = 3$: Pro lepší srozumitelnost se ještě podíváme na tento případ. Označme nevěrné manželky A, B, C. Manžel A tedy ví, že manželé B, C vědí o jedné nebo o dvou nevěrných ženách (podle toho, jestli je A nevěrná). První den zřejmě není žádná žena vyhnána. Dále manžel A uvažuje takto: Zatím nemám důvod vyhánět svou ženu. Pokud by moje žena byla věrná, byly by B a C vyhnány druhý den, neboť by manželé B a C uvažovali stejně jako v bodě 2. Stejně budou uvažovat manželé B i C, takže kvůli tomu, že ani druhý den není žádná žena vyhnána, budou třetí den vyhnány A, B i C.

Na základě těchto poznatků zformulujeme a poté dokážeme následující lemma.

Lemma:
Všichni manželé mají tuto vědomost: Pro všechna $i \in \mathbb{N}$ platí: pokud je ve městě i nevěrných manželek, budou všechny vyhnány i-tý den.

Důkaz:
Indukcí:

1. *Pro $i = 1, 2, 3$ manželé tuto vědomost mají, protože provedou stejné úvahy jako v bodech 1,2,3.*

2. *Nechť je ve městě $k > 3$ nevěrných manželek. Předpokládejme, že všichni manželé mají následující vědomost: pro $m \in \{1, \dots, k-1\}$ platí: pokud je ve městě nevěrných m manželek, jsou všechny vyhnány m-tý den. Manželé nevěrných manželek vědí, že je $k-1$ manželek nevěrných + možná také ta jejich. Podle indukčního předpokladu tedy víme, že všech k manželů nevěrných manželek bude uvažovat takto: Počkám si do $(k-1)$-ního dne a pokud je mně moje žena věrná, bude tento den vyhnáno $k-1$ žen, o kterých vím, že jsou nevěrné. Ale $(k-1)$-ní den nebude vyhnána žádná žena, takže následující den bude vyhnáno všech k nevěrných žen.*

Protože všichni manželé mají vědomost podle lemmatu, je jasné, že prvních $n-1$ dní se nic nestane a n-tý den po panovníkově proslovu bude z města vyhnáno všech n nevěrných manželek.

Úloha 1.7

Kouma s Ňoumou se jednoho letního dne šíleně hádali. Když už byli ve při hodně douho, uvědomil si Kouma, že to trošku přepískl, a začal se Ňoumovi omlouvat. Ten však ve zlosti pravil, že mu odpustí, teprve až dokáže, že pro všechna přirozená čísla n má číslo $\left(5 + \sqrt{26}\right)^n$ prvních n cifer za desetinnou čárkou stejných. Pomozte klukům se usmířit.

Řešení:

Položme $a_n = (5+\sqrt{26})^n$, dále $b_n = a_n + (5-\sqrt{26})^n$. Pokud umocníme v čísle b_n oba sčítance podle binomické věty, dostaneme, že b_n je celé číslo. Dále víme, že $\sqrt{26} - 5 < 0{,}1$, tudíž $(\sqrt{26}-5)^n < 10^{-n}$. Nyní rozlišme dva případy:

1. n je sudé: Pak $b_n > a_n = b_n - (5-\sqrt{26})^n > b_n - 10^{-n}$. Protože b_n je celé, leží a_n mezi čísly $z+1$ a $z,\underbrace{99\ldots9}_{n\,\text{devítek}}$, kde $z = b_n - 1$, tudíž prvních n cifer čísla a_n za desetinnou čárkou je složeno ze samých devítek.

2. n je liché: Pak $b_n < a_n = b_n - (5-\sqrt{26})^n < b_n + 10^{-n}$. Nyní a_n leží mezi čísly b_n a $b_n,\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\,\text{nul}}1$, tudíž prvních n cifer za desetinou čárkou čísla a_n je rovných nule.