BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXIII. ročník
2026/2027



Pomocný text k 2. sérii

Geometrická Zobrazení

autor: *Anička Hronová + Ráďa Fojtová*



V tomto pomocném textu se podíváme na geometrická zobrazení. Je napsaný tak, aby ti pomohl, i když ses s nimi ještě nikdy systematicky nesetkal/a. Nejdřív si stručně vysvětlíme základní typy zobrazení a jejich triky, a pak si všechno můžeš procvičit na příkladech!

Jak s textem pracovat: Než se podíváš na nápovědu, vždycky si zkus úlohu nejdřív sám nakreslit a promyslet. V geometrii je dobrý obrázek víc než polovina úspěchu – ať už úlohu řešíš, nebo sepisuješ její finální řešení.

Zobrazení v rovině

Zobrazení f v rovině je předpis, který každému bodu X roviny přiřazuje právě jeden bod X' této roviny. Bod X se nazývá **vzor**, bod X' **obraz** bodu X. Zapisujeme $f(X) = X'$ nebo $f : X \to X'$.

Důležité je slovo „právě jeden“. Pro každý bod musí být jasně dané, kam se zobrazí. Několik příkladů a protipříkladů:

- „Každému bodu přiřadíme bod, který je o 3 cm vpravo od něj.“ Je to zobrazení (posunutí).
- „Pevně zvolíme bod O a každému bodu X přiřadíme střed úsečky XO.“ Je to zobrazení (zmenšení na polovinu, tzv. stejnolehlost).
- „Každému bodu přiřadíme nějaký bod vzdálený 1 cm.“ Není to zobrazení, protože není řečeno, který z nekonečně mnoha bodů to má být.
- „Každému bodu přiřadíme jeho vzdálenost od bodu O.“ Není to zobrazení v rovině, protože výsledkem je číslo, a ne bod.

Důležité pojmy a vlastnosti

Jakmile známe základní definici, můžeme zkoumat speciální vlastnosti zobrazení:

- **Samodružný bod:** Bod, který se zobrazí sám na sebe, tedy platí $f(X) = X$.
- **Identita:** Zobrazení, ve kterém je každý bod samodružný.
- **Inverze:** Všechna zobrazení v tomto textu jdou „vrátit zpět“ — ke každému zobrazení existuje inverzní zobrazení f^{-1}, které obraz zobrazí zpátky na vzor. Proto můžeme při řešení úloh bez obav zobrazovat oběma směry.
- **Skládání zobrazení:** Zobrazení můžeme řetězit za sebou. Zápis $(g \circ f)(X)$ znamená, že bod X nejdřív zobrazíme zobrazením f a výsledný bod pak zobrazením g.

Shodná zobrazení (shodnost)

Zobrazení f v rovině je **shodné**, jestliže pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' platí:

$$|X'Y'| = |XY|$$

Co to znamená v praxi: Shodné zobrazení zachovává vzdálenosti. Útvar se při něm „jen přesune“ nebo otočí — žádná úsečka se neprodlouží ani nezkrátí. Pokud je shodné zobrazení **přímé**, znamená to, že zachovává orientaci útvaru.

Podobná zobrazení (podobnost)

Zobrazení f v rovině je **podobné**, jestliže existuje číslo $k > 0$ takové, že pro každé dva body X, Y roviny a jejich obrazy X', Y' platí:

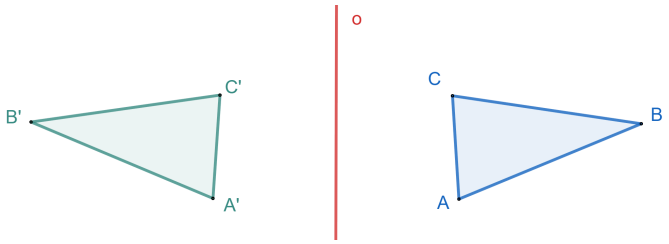
$$|X'Y'| = k \cdot |XY|$$

Číslo k se nazývá **koeficient podobnosti**. Při podobném zobrazení se všechny vzdálenosti změní stejněkrát. Útvar se zvětší nebo zmenší, ale jeho tvar zůstane zachován. Každé shodné zobrazení je speciálním případem podobnosti, kde je koeficient $k = 1$.

Shodná zobrazení

Osová souměrnost

Osová souměrnost je zobrazení dané přímkou o, které se říká **osa souměrnosti**. Obrazem bodu A v osové souměrnosti podle osy o je bod A', který splňuje: (1.) $AA' \perp o$; a zároveň (2.) střed úsečky AA' leží na ose o. Osovou souměrnost si představujeme jako překlopení podle osy, nebo jako zrcadlení. Obraz bodu najdeš takto: z bodu spustíš kolmici na osu a na druhou stranu osy ji prodloužíš o stejnou vzdálenost.
Označení: $O_o(X) = X'$.



Obrázek 1: Osová souměrnost

Vlastnosti osové souměrnosti

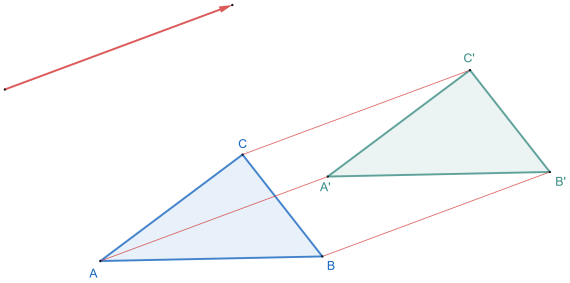
- Osová souměrnost je shodné zobrazení.
- Samodružné body jsou právě body osy.
- Provedeme-li osovou souměrnost dvakrát za sebou podle stejné osy, vrátíme se zpátky, tj. $O_o \circ O_o$ je identita.

- Přímka kolmá k ose se zobrazí sama na sebe (jen se otočí).

Poznámka: Osová souměrnost mění orientaci útvaru. Obíháme-li trojúhelník ABC proti směru hodinových ručiček, trojúhelník $A'B'C'$ budeme obíhat po směru hodinových ručiček. Proto jsou přímá shodná zobrazení složením sudého počtu osových souměrností.

Posunutí

Posunutí (neboli translace) je zobrazení dané vektorem $\overrightarrow{v}$. Obrazem bodu A v posunutí o vektor $\overrightarrow{v}$ je bod A' takový, že $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{v}$. Útvar prostě vezmeme a posuneme o určitou vzdálenost, všechny body stejným směrem po rovnoběžkách.
Označení: $t_{\overrightarrow{v}}(X) = X'$.

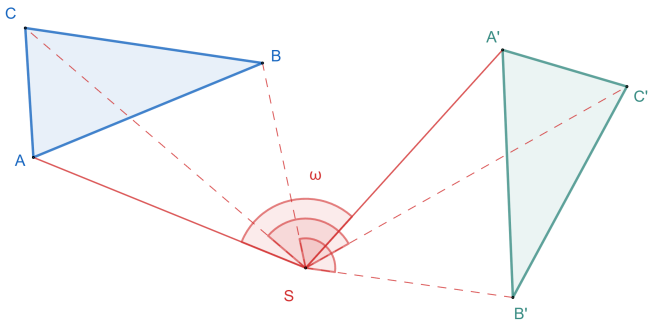


Obrázek 2: Posunutí

Poznámka: Je-li vektor $\overrightarrow{v}$ nenulový, pak toto zobrazení **nemá žádný samodružný bod**.

Otočení

Otočení (rotace) je zobrazení dané středem rotace S a orientovaným úhlem ω. Obrazem bodu A v rotaci se středem S o úhel ω je bod A', kde velikost orientovaného úhlu ASA' je rovna velikosti úhlu ω a $|AS| = |A'S|$. Střed rotace je samodružný.
Označení: $R_{\omega,S}(X) = X'$.

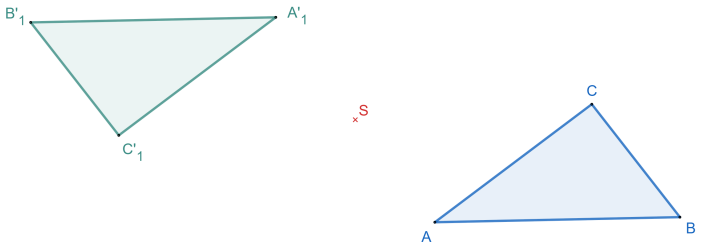


Obrázek 3: Otočení

Důležitá vlastnost otočení: přímka a její obraz svírají úhel ω. Otáčíme-li například o 90°, bude každá úsečka kolmá na svůj obraz. Otočení se hodí všude, kde vidíš „stejně dlouhé úsečky vycházející z jednoho bodu s pevným úhlem mezi nimi“.

Středová souměrnost

Středová souměrnost se středem v bodě S je zobrazení v rovině, ve kterém se každý bod X zobrazí na bod X' tak, že bod S je středem úsečky XX'. Tedy platí $|XS| = |SX'| = \frac{1}{2}|XX'|$. Bod S se nazývá **střed souměrnosti**.
Označení: $S_S(X) = X'$.



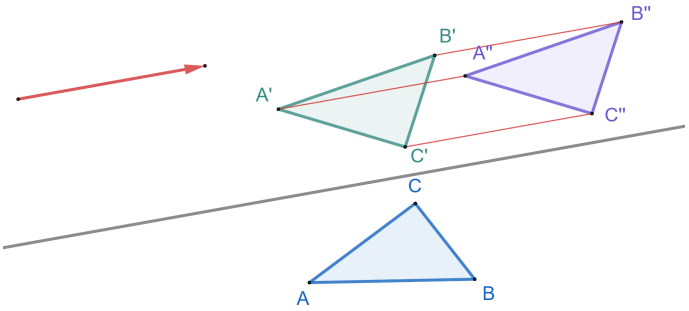
Obrázek 4: Středová souměrnost

Otázka: Středová souměrnost je speciální případ jednoho z již zmíněných shodných zobrazení. Které to je?
Odopvěď: Body X, S, X' leží na přímce a S leží mezi X a X' tak, že úhel XSX' je 180° a $|SX| = |SX'|$. Středová souměrnost je tedy otočení o 180° kolem bodu S.
Z toho vyplývají tyto užitečné vlastnosti:

- Obrazem přímky je **rovnoběžná** přímka (otočení o 180° znamená, že přímka a její obraz svírají úhel 180°, tj. jsou rovnoběžné). Přímka procházející středem se zobrazí sama na sebe.
- Útvary, které jsou středově souměrné (zobrazí se samy na sebe), jsou například **rovnoběžník** (střed souměrnosti je průsečík úhlopříček) nebo **kružnice** (střed je její střed).

Klouzavá souměrnost

Klouzavá souměrnost je složení osové souměrnosti podle osy o a posunutí o vektor rovnoběžný s o (nezáleží, v jakém pořadí). Nemá žádný samodružný bod. Klouzavou souměrnost si můžeš představit jako stopy v písku: každá další stopa vznikne překlopením a posunutím vpřed.



Obrázek 5: Klouzavá souměrnost

Skládání osových souměrností

Osová souměrnost je základní stavební kámen shodných zobrazení. Ostatní shodná zobrazení lze z osových souměrností poskládat.

Věta 1: Nechť o_1, o_2 jsou dvě přímky.

1. Jsou-li $o_1 \parallel o_2$ ve vzdálenosti d, pak $O_{o_2} \circ O_{o_1}$ je posunutí o vektor délky $2d$ kolmý na obě osy, ve směru od o_1 k o_2.
2. Protínají-li se o_1, o_2 v bodě S a svírá-li o_2 s o_1 orientovaný úhel φ, pak $O_{o_2} \circ O_{o_1}$ je otočení kolem S o úhel 2φ.

Důkaz:

1. Zvolme souřadnice tak, aby o_1 byla osa y (tj. přímka $x = 0$) a o_2 byla přímka $x = d$. Osová souměrnost podle o_1 zobrazí bod (x, y) na bod $(-x, y)$. Osová souměrnost podle přímky $x = d$ zobrazí bod (u, v) na $(2d - u, v)$. Po složení: $(x, y) \mapsto (-x, y) \mapsto (2d - (-x), y) = (x + 2d, y)$. Je to posunutí o vektor $(2d, 0)$.
2. Zvolme souřadnice tak, aby S byl počátek a o_1 byla kladná poloosa x. Každý bod $X \neq S$ popíšeme dvojicí (r, α): r je jeho vzdálenost od S a α je úhel, který svírá polopřímka SX s polopřímkou o_1. Osová souměrnost podle přímky procházející bodem S, která svírá s o_1 úhel θ, zobrazí (r, α) na $(r, 2\theta - \alpha)$. Nejdřív zobrazíme podle o_1 ($\theta = 0$): $(r, \alpha) \mapsto (r, -\alpha)$. Pak podle o_2 ($\theta = \varphi$): $(r, -\alpha) \mapsto (r, 2\varphi + \alpha)$. Vzdálenost od S se nezměnila, úhel vzrostl o 2φ, to je otočení o 2φ kolem S.

Z věty hned plyne několik důsledků:

- Středová souměrnost je složení dvou osových souměrností s *kolmými* osami, které se protínají ve středu ($\varphi = 90°$, takže otočení o $180°$).
- Každé posunutí a každé otočení můžeme „rozložit“ na dvě osové souměrnosti. Například otočení kolem S o úhel ω je složením dvou osových souměrností s osami procházejícími S, které svírají úhel $\omega/2$. Tohle je velmi silný trik: osy si můžeš vybrat podle toho, kde se ti to hodí.
- Každé shodné zobrazení v rovině lze vyjádřit jako složení nejvýše tří osových souměrností. Důkaz tohoto tvrzení vynecháme. Je ale užitečné si rozmyslet, že všechna výše zmíněná zobrazení jdou skutečně z osových souměrností složit.

Podobná zobrazení

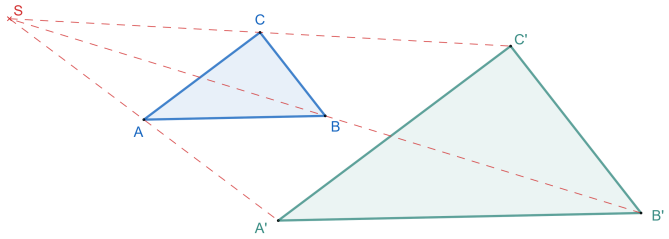
Stejnolehlost

Stejnolehlost (homotetie) je zobrazení dané středem stejnolehlosti S a nenulovým koeficientem $k \in \mathbb{R}$. Obrazem bodu A ve stejnolehlosti se středem S a koeficientem k je bod A' takový, že $\overrightarrow{SA'} = k \cdot \overrightarrow{SA}$. Jinými slovy:

1. Pokud $k > 0$, pak A' leží na polopřímce SA a platí $|SA'| = k \cdot |SA|$.

2. Pokud $k < 0$, pak A' leží na polopřímce opačné k polopřímce SA a platí $|SA'| = -k \cdot |SA|$.

Stejnolehlost je zvětšení nebo zmenšení kolem pevného bodu. Pokud je k záporné, obrázek se navíc „překlopí na druhou stranu“ středu.



Obrázek 6: Stejnolehlost pro $k = 2$

Vlastnosti stejnolehlosti

- Střed stejnolehlosti S je v tomto zobrazení samodružný bod.
- Pro $k = 1$ je to identita, pro $k = -1$ středová souměrnost se středem S.
- Délky se změní $|k|$-krát: $|X'Y'| = |k| \cdot |XY|$. Obsahy se změní k^2-krát.
- Úhly se zachovají. Obrazem přímky je **rovnoběžná** přímka (přímka procházející středem se zobrazí sama na sebe).
- Obrazem kružnice $k(O, r)$ je kružnice se středem v obrazu O' bodu O a poloměrem $|k| \cdot r$.

Poslední bod znamená, že každé dvě kružnice mohou být stejnolehlé. Konkrétně:

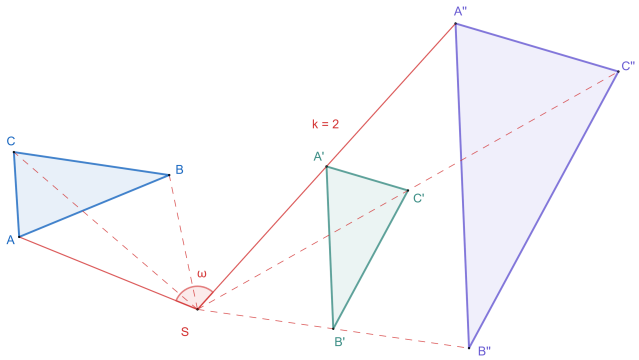
- Dvě nesoustředné kružnice o různých poloměrech $r_1 \neq r_2$ jsou stejnolehlé ve **dvou** stejnolehlostech: s kladným koeficientem r_2/r_1 („vnější“ střed) a se záporným koeficientem $-r_2/r_1$ („vnitřní“ střed). Oba středy leží na přímce spojující středy kružnic.
- Dvě nesoustředné kružnice o stejných poloměrech jsou stejnolehlé v jedné stejnolehlosti, a to je středová souměrnost se středem ve středu spojnice středů kružnic.
- Soustředné kružnice jsou stejnolehlé se středem stejnolehlosti shodným se středem kružnic.

Spirální podobnost

Spirální podobnost v sobě elegantně spojuje dvě základní zobrazení: otočení a stejnolehlost se stejným středem. Je plně určena středem spirální podobnosti O, orientovaným úhlem otočení ω a koeficientem stejnolehlosti $k > 0$. Stejně jako u klouzavé souměrnosti, ani tady nezáleží, zda objekt nejdříve otočíme a pak zvětšíme/zmenšíme, nebo naopak.

Každé dva přímo podobné (tedy stejně orientované) útvary na sebe můžeme zobrazit buď posunutím, nebo spirální podobností. Pokud máš v rovině čtyři body A, B, C, D,

které netvoří rovnoběžník $ABDC$ (záleží na pořadí!), vždy existuje právě jedna spirální podobnost, která převede $A \to C$ a $B \to D$.
Označení: $S_{O,\omega,k}(X) = X'$.



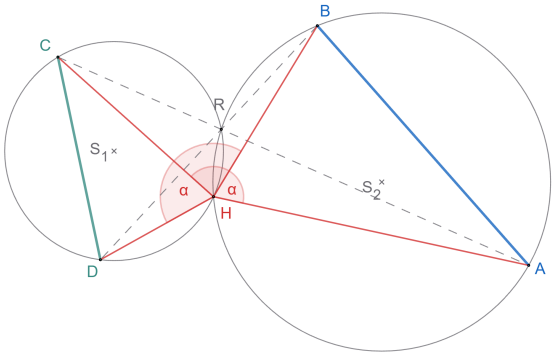
Obrázek 7: Spirální podobnost

Vlastnosti spirální podobnosti

- Úhel mezi libovolnou přímkou a jejím obrazem je roven úhlu otočení ω.
- Poměr délky obrazu úsečky a původní úsečky odpovídá koeficientu k.
- Pro $k = 1$ se zobrazení redukuje na čisté otočení.
- Pro $\omega = 0$ jde o stejnolehlost s kladným koeficientem.

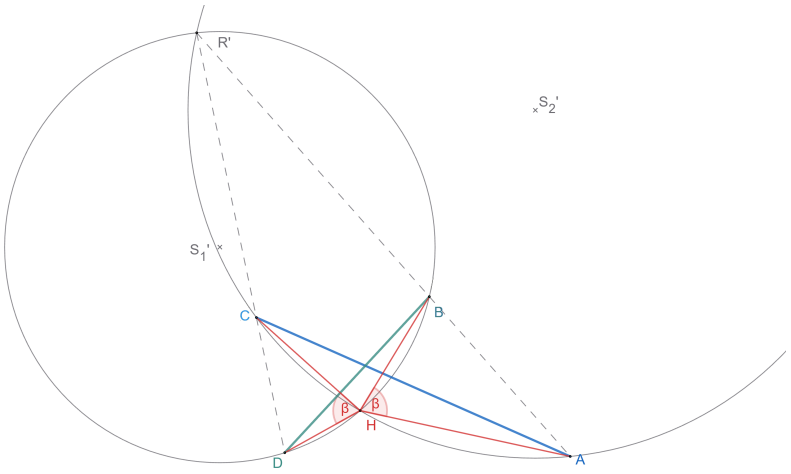
Jak najít střed spirální podobnosti?
Pro sestrojení středu H, který převádí úsečku AB na úsečku CD, využíváme opsané kružnice. Tento střed se v geometrii nazývá Miquelův bod a podle zadání ho můžeme získat dvěma způsoby:

1. Pomocí průsečíku úhlopříček: Nechť R je průsečík úhlopříček AC a BD. Střed H je pak druhým průsečíkem kružnic opsaných trojúhelníkům ABR a CDR. Koeficient stejnolehlosti spočítáš jako $k = |CD|/|AB|$ a pro úhel otočení platí $\omega = \sphericalangle AHC = \sphericalangle BHD$.



Obrázek 8: Střed spirální podobnosti

2. Pomocí průsečíku prodloužených stran: Nechť R' je průsečík přímek AB a CD. Střed H v tomto případě leží na průsečíku kružnic opsaných trojúhelníkům ACR' a BDR'. I zde si můžeš všimnout, že se úhel zobrazení zachovává a platí $\sphericalangle AHB = \sphericalangle CHD$.



Obrázek 9: Střed spirální podobnosti zkonstruovaný pomocí průsečíku přímek AB a CD.

Věta 2: Pokud existuje spirální podobnost se středem H, která zobrazuje $A \to B$ a $C \to D$, pak zaručeně existuje i sdružená spirální podobnost se stejným středem H, která zobrazuje $A \to C$ a $B \to D$.

Důkaz: Z prvního zobrazení víme, že trojúhelníky HAB a HCD jsou podobné a stejně orientované. Platí tedy $|HB|/|HA| = |HD|/|HC|$ a $\sphericalangle AHB = \sphericalangle CHD$. Když od obou úhlů odečteme (nebo k nim přičteme) společný úhel BHC, získáme rovnost $\sphericalangle AHC = \sphericalangle BHD$. Zároveň si původní poměr stran můžeme přepsat jako $|HC|/|HA| = |HD|/|HB|$. Z toho vyplývá, že trojúhelníky HAC a HBD se shodují v poměru dvou stran a úhlu mezi nimi, takže jsou také podobné. Spirální podobnost, která bod A zobrazí na C, tedy nutně zobrazí bod B na D.

Praktická rada na závěr: Kdykoli v úloze objevíš dva podobné trojúhelníky, které sdílejí jeden vrchol (jeden je jen pootočenou a zvětšenou kopií druhého), jde o spirální podobnost, která ti úplně zadarmo dá druhou dvojici podobných trojúhelníků.

Obecná ponaučení

Všechna zobrazení, která jsme zatím potkali, mají pár společných vlastností. Nejvíc se ti bude hodit pravidlo *Sedí-li pták na drátě, sedí i stín ptáka na stínu drátu*. To znamená, že pokud bod A leží na přímce p, pak i jeho obraz A' leží na obrazu přímky p'. Průsečík se zobrazí na průsečík, tečna na tečnu a střed kružnice na střed kružnice.

A jak vlastně vypadá obraz přímky p? Tady je tabulka pro rychlou orientaci:

Zobrazení	*Obraz p' přímky p*
posunutí	rovnoběžná přímka
středová souměrnost	rovnoběžná přímka (přímka procházející S se zobrazí na sebe)
stejnolehlost	rovnoběžná přímka (přímka procházející S se zobrazí na sebe)
otočení o ω	přímka, která s p svírá úhel ω (nebo $180° - \omega$)
osová souměrnost	p a p' se protínají na ose o (nebo splývají / jsou rovnoběžné)

Jak zobrazení použít při řešení úloh

Nejtěžší není pochopit, co zobrazení dělají, ale přijít na to, *kdy a které* použít. Tady je pár vodítek:

Co v úloze vidíš	*Co zkusit*
nejkratší cesta s odrazem, součet délek dvou úseček, osa úhlu, rovnoramenný trojúhelník	osová souměrnost (podle osy úhlu nebo přímky, na které se odráží)
rovnoběžník, střed úsečky, dvě stejně dlouhé úsečky v opačných polohách	středová souměrnost
čtverec, rovnostranný trojúhelník, stejně dlouhé úsečky z jednoho bodu s pevným úhlem	otočení (o 90°, 60°, . . .)
rovnoběžky, lichoběžník, potřebuješ přenést úsečku nebo úhel jinam	posunutí
těžiště, středy stran, dvě kružnice se společnou tečnou, rovnoběžky s poměry stran	stejnolehlost
dva podobné trojúhelníky se společným vrcholem, průsečík dvou přímek a kružnice opsané	spirální podobnost

Postup, který funguje skoro vždycky:

1. Nakresli si pořádný obrázek a vyznač si do něj všechno, co víš.
2. Zeptej se sama sebe: Co mi chybí? Které dvě věci by měly být blízko sebe, ale nejsou?
3. Vyber zobrazení podle tabulky a zobraz jen *vhodný* bod nebo úsečku, ne nutně celý obrázek.
4. Hledej, co nového se objevilo (shodné trojúhelníky, rovnoběžky, úsečky v přímce).
5. Pokud nic nevidíš, zkus zobrazit jiný bod nebo použít jiné zobrazení.

Při sepisování řešení pak pamatuj na tři věci. Vždycky přesně definuj zobrazení (střed, osa, úhel, koeficient) a rovnou napiš, kam se klíčové body zobrazí. Samotný nákres nestačí, vždy zdůvodni, proč se bod zobrazil zrovna tam. A nakonec si dej pozor na různé konfigurace, obrázek pro ostroúhlý trojúhelník může u tupoúhlého dopadnout úplně jinak.

Úlohy k procvičení

V geometrii platí jedno zásadní pravidlo: bez pořádného obrázku to prostě nejde. Proto v této sekci úmyslně nenajdeš sáhodlouhá vzorová řešení krok za krokem. Všechny příklady jsme spojili do jedné velké výzvy, kde dopředu nevíš, jaké zobrazení tě zachrání.

Tvým úkolem je nakreslit si ke každé úloze náčrtek a pokusit se na řešení přijít samostatně. Pokud se přece jen zasekneš, hned pod zadáním najdeš nápovědu, která tě pošťouchne správným směrem.

Rozcvička

- Jaké zobrazení je složením dvou posunutí? A jaké složením dvou středových souměrností se středy S_1 a S_2?

- Jaké zobrazení je složením dvou stejnolehlostí se stejným středem a koeficienty k a l?
- Dokažte z definice stejnolehlosti, že obrazem přímky je přímka s ní rovnoběžná.
- Dokažte, že osová souměrnost je shodné zobrazení (tj. zachovává vzdálenosti).

Příklady

Příklad 1: Kde se v osové souměrnosti protíná vzor přímky a obraz? Dokažte.

Nápověda: Rozeber si tři případy: přímka je s osou rovnoběžná, kolmá, nebo ji protíná. U různoběžek nezapomeň, že jejich průsečík musí ležet na ose, jde tedy o samodružný bod.

Příklad 2: Pan Kytička jde zalít svůj záhonek. Vychází ze svého domu, po cestě nabere vodu z řeky (představujme si ji jako přímku) a poté ji donese ke svému záhonku. Záhonek i domek pana Kytičky se nacházejí na stejném břehu řeky (stejná polorovina určená přímkou řeky), ale jsou v různé vzdálenosti od ní. Určete, v jakém místě řeky má pan Kytička nabrat vodu, aby ušel co nejkratší vzdálenost.

Nápověda: Zobraz si záhonek v osové souměrnosti podle řeky. Kudy vede nejkratší cesta mezi dvěma body? Pomůže ti trojúhelníková nerovnost.

Příklad 3 (MO68-B-S-3)**:** Je dána kružnice k a její průměr AB. Uvnitř úsečky AB zvolíme libovolný bod C a pak na kružnici k vybereme bod D tak, aby platilo $|BC| = |BD|$. Osa úhlu ABD protne kružnici k v bodě E (různém od bodu B). Dokažte, že trojúhelníky AEC a CBD jsou podobné.

Nápověda: Využij osovou souměrnost podle osy úhlu ABD. Zjisti, kam se zobrazí bod C, a pak pomocí obvodových úhlů a Thaletovy věty ukaž, že trojúhelníky AEC a CBD mají stejné úhly.

Příklad 4: Nechť $ABCD$ je rovnoběžník a na jeho stranách AB, BC, CD, DA leží po řadě body K, L, M a N, které tvoří další rovnoběžník $KLMN$. Dokažte, že oba rovnoběžníky mají společný střed.

Nápověda: Uvažuj středovou souměrnost podle průsečíku úhlopříček vnitřního rovnoběžníku. Kam se v ní zobrazí přímky nesoucí strany vnějšího rovnoběžníku?

Příklad 5: V trojúhelníku ABC jsou uvnitř strany BC dva (ne nutně různé) body D a E tak, že $|BD| = |CE|$. Pro kterou polohu bodů D a E je $|AD| + |AE|$ minimální?

Nápověda: Zobraz bod A ve středové souměrnosti podle středu strany BC. Pro zjištění minimálního součtu délek pak stačí použít trojúhelníkovou nerovnost pro lomenou čáru.

Příklad 6: Dvě kružnice k_1 a k_2 o stejném poloměru r mají vnější dotyk v bodě K. Zvolme body $A \in k_1$ a $B \in k_2$ tak, aby úhel AKB byl pravý. Dokažte, že $|AB| = 2r$.

BRKOS Team

Nápověda: Zobraz první kružnici na druhou pomocí středové souměrnosti podle bodu dotyku K. Thaletova věta ti pak ukáže, že obraz tětivy AK je vlastně průměr druhé kružnice.

Příklad 7: Na straně CD čtverce $ABCD$ je dán bod E. Osa úhlu BAE protne stranu BC v bodě F. Dokažte, že $|AE| = |BF| + |DE|$.

Nápověda: Otoč trojúhelník ABF kolem vrcholu A o 90° tak, aby bod B splynul s bodem D. Vznikne ti nový rovnoramenný trojúhelník.

Příklad 8: Vně daného trojúhelníku ABC jsou sestrojeny čtverce $ACDE$ a $CBFG$. Dokažte, že $|AG| = |BD|$.

Nápověda: Uvažuj otočení celého trojúhelníku s úsečkou DB kolem bodu C o 90°. Uvědom si, kam při tomto zobrazení přejde bod D a kam bod B.

Příklad 9: Dokažte, že střední příčky rozdělí trojúhelník ABC na čtyři trojúhelníky, z nichž střední trojúhelník $A_1B_1C_1$ je podobný ABC s koeficientem $\frac{1}{2}$. Zde A_1, B_1, C_1 jsou středy stran BC, CA, AB.

Nápověda: Středem stejnolehlosti bude těžiště trojúhelníku. Zkus si odvodit, jaký bude koeficient, když víš, v jakém poměru dělí těžiště těžnice.

Příklad 10: Je dán ostroúhlý trojúhelník ABC. Sestrojte čtverec $PQRS$, jehož vrcholy P, Q leží na straně BC, vrchol R na straně AC a vrchol S na straně AB.

Nápověda: Nakresli si pomocný čtverec tak, aby celou stranou ležel na straně BC a měl jeden vrchol na AB. K tomu, abys ho správně zvětšila až k AC, použij stejnolehlost se středem v bodě B.

Příklad 11: Kružnice $k_1(O_1, r_1)$ a $k_2(O_2, r_2)$ se protínají v bodech P a Q. Bodem P vedeme přímku, která protne kružnici k_1 podruhé v bodě A a kružnici k_2 podruhé v bodě B. Jak máme přímku zvolit, aby délka $|AB|$ byla největší?

Nápověda: Uvažuj spirální podobnost se středem Q, která převede střed jedné kružnice na střed druhé. Z podobnosti trojúhelníků zjistíš, že poměr délek tětiv je konstantní. Kdy je úsečka nejdelší?

Příklad 12 (Prase)**:** Mějme rovnoramenný trojúhelník ABC se základnou AB. Bod D leží na jeho kružnici vepsané k se středem I a v polorovině CIB tak, že $|\sphericalangle CID| = |\sphericalangle ACB|$. Tečna kružnice k vedená bodem D protíná stranu BC v bodě E. Dokažte, že body A, I a E leží na jedné přímce.

Nápověda: Nemohly by všechny tři body ležet na ose souměrnosti? Bude potřeba si dokreslit obraz nějakého důležitého objektu.

Příklad 13 (MOA-60-II)**:** Je dán trojúhelník ABC s obsahem S. Uvnitř trojúhelníku, je-

hož vrcholy jsou ve středech stran trojúhelníku ABC, je libovolně zvolen bod U. Označme A', B', C' po řadě obrazy bodů A, B, C v souměrnosti se středem U. Dokažte, že šestiúhelník $AC'BA'CB'$ má obsah $2S$.

Nápověda: Nebudou ty středy stran důležité? Zkus si je do obrázku poctivě vyznačit.

Příklad 14 (Prase)**:** Je dán čtyřúhelník $ABCD$ s různoběžnými protějšími stranami. Průsečík přímek AB a CD označme Q a průsečík přímek AD a BC označme R. Ukažte, že kružnice opsané trojúhelníkům BCQ, ADQ, ABR, CDR procházejí jedním bodem.

Nápověda: Najdi spirální podobnost, která zobrazuje $A \to D$ a $B \to C$. Kde leží její střed? Použij pravidlo o Miquelově bodu.

Příklad 15: Je dán trojúhelník ABC a bod P ležící na oblouku kružnice opsané trojúhelníku ABC mezi vrcholy B a C, na kterém neleží vrchol A. Paty kolmic z bodu P k přímkám BC a AC označme postupně X a Y. Je-li M střed úsečky AB a N střed úsečky XY, pak platí, že úhel MNP je pravý. Dokažte.

Nápověda: Středem spirální podobnosti bude bod P. Zkus najít dva podobné trojúhelníky se společným vrcholem P (pomůže čtyřúhelník $PXCY$) a podívej se, kam se zobrazí bod M.

Příklad 16: Konvexní šestiúhelník $ABCDEF$ má všechny strany shodné a protější dvojice stran rovnoběžné. Označme X a Y průsečíky výšek trojúhelníků ACE a BDF. Ukažte, že v případě $X \neq Y$ střed úsečky XY půlí úsečku AD.

Nápověda: Co všechno plyne z toho, že protější strany jsou shodné a rovnoběžné? Nemá náhodou celý šestiúhelník nějakou pěknou souměrnost?

Příklad 17: Jsou dány dvě různoběžky a, c procházející bodem P a bod B, který na nich neleží. Sestrojte pravoúhelník $ABCD$ s vrcholy A, C a D po řadě na přímkách a, c a PB.

Nápověda: Využij otočení o 90° kolem bodu P, které ti pomůže zobrazit přímku a na nějakou novou pomocnou přímku.

Příklad 18: Jsou dány dvě nesoustředné kružnice k_1, k_2 a přímka p. Sestrojte s ní rovnoběžnou přímku q, která na kružnicích k_1, k_2 vytne tětivy téže délky.

Nápověda: Jak bychom mohli zajistit, aby dvě kružnice měly stejně velkou tětivu? Zkus si jednu kružnici v rovině vhodně posunout.