

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXII. ročník
2025/2026



Pomocný text ke 5. sérii

USPOŘÁDANÉ MNOŽINY

autor: Terka Krejčí



1 Množiny

Dalo by se říct, že množiny jsou základní kameny, na kterých budujeme celou matematiku, a v podstatě všechno, s čím se v matematice setkáváte, se dá formálně definovat jako množina. Intuitivně chápeme, že množina je prostě nějaký pytlík, do kterého můžeme házet různé prvky. Vybudovat pořádně (axiomaticky) teorii množin dá ale docela zabrat.

Problém nastává, když množiny začínají být příliš velké. Ukazuje se, že nemůžeme třeba chtít mít množinu všech množin. Důležitým bodem v rozvoji teorie množin byl takzvaný Russelův paradox: uvažme množinu všech množin, které nejsou samy svými prvky. Je taková množina prvkem sebe samé?

Nám ale bude stačit pracovat s množinami naivně tak, jak je chápeme intuitivně, a pamatovat na to, že co se opravdu velkých množin týče, musíme být trochu opatrní.

1.1 Základní pojmy a značení

Standardní je, pokud to dává smysl, značit množiny velkými písmeny a jejich prvky malými písmeny. Když chceme vyjádřit, že a je v A , píšeme $a \in A$. Množinu můžeme zadat výčtem jejích prvků třeba takto: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$. Prázdnou množinu (neobsahující ani jeden prvek) budeme značit $\emptyset$.

Základními operacemi s množinami jsou průnik $A \cap B = \{3\}$, což je množina těch prvků, které leží jak v jedné, tak i ve druhé množině, sjednocení $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, což je množina prvků ležících alespoň v jedné z daných množin, a rozdíl $A \setminus B = \{1, 2\}$, jemuž náleží prvky ležící v první množině, ale ne ve druhé. Potkat se můžete ještě se symetrickým rozdílem $A \div B = \{1, 2, 4\}$, množinou prvků náležících právě jedné z daných dvou množin.

Velice důležitou operací na množinách je kartézský součin dvou (a více) množin. Značíme ho $A \times B$ a jde o množinu všech dvojic (a, b) , kde $a \in A, b \in B$. V našem případě jde tedy o množinu $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4)\}$.

Podmnožinou množiny A rozumíme jakoukoli množinu C takovou, že každý prvek množiny C náleží i A . Tuto skutečnost značíme $C \subseteq A$. Často se hodí uvažovat množinu všech podmnožin nějaké množiny, kterou budeme značit $\mathcal{P}(A)$. V našem případě $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

2 Uspořádání

Nejprve definujeme pojem (binární) relace. Relace popisují nějaké vztahy mezi prvky dvou (často stejných) množin.

Definice: Binární relace R mezi množinami A a B je podmnožina jejich kartézského součinu $A \times B$. Pokud $A = B$, říkáme, že jde o relaci na množině A . Skutečnost, že dva prvky a a b jsou v relaci, tedy $(a, b) \in R$, značíme aRb .

Relaci znáte spoustu: všechna zobrazení (dvojice vzor-obraz), rovnost (každý prvek je v relaci pouze sám se sebou), kongruence (celé číslo je v relaci s každým dalším celým číslem, které dává stejný zbytek po dělení) a také uspořádání (prvek je v relaci s každým prvkem, který je větší než on).

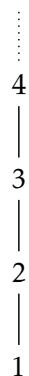
Definice: Uspořádáním na množině A nazveme relaci $\leq$ na množině A , která je

1. reflexivní: každý prvek je v relaci sám se sebou, pro každé $a \in A$ platí, že $a \leq a$;
2. antisymetrická: pokud $a \leq b$ a $b \leq a$, tak nutně platí $a = b$;
3. tranzitivní: pokud $a \leq b$ a $b \leq c$, tak i $a \leq c$.

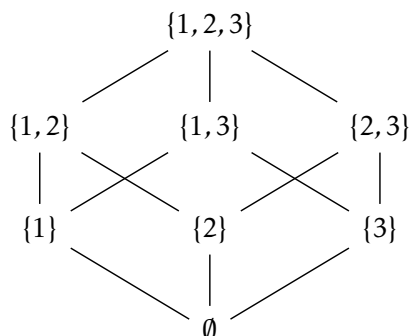
Množinu s uspořádáním nazýváme uspořádanou množinou (pokud množina není lineárně uspořádaná (viz dále), používá se někdy termín částečně uspořádaná množina). Pokud je důležité specifikovat, jaké uspořádání máme na mysli, píšeme ji jako dvojici $(A, \leq)$.

Příklady uspořádání jsou samozřejmě zejména ta, která dobře známe: standardní uspořádání na přirozených, celých, racionálních a reálných číslech.

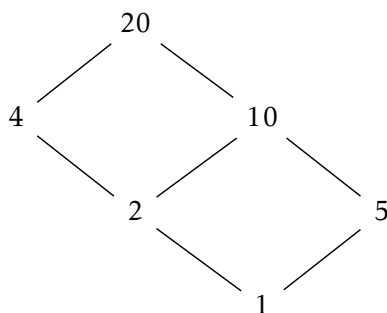
Uspořádání můžeme znázorňovat diagramy. Čára mezi dvěma prvky znamená, že ten nahoře je větší než ten dole. Čáry většinou kreslíme jen mezi těmi dvojicemi prvků, mezi kterými už žádný další není, ty které plynou z tranzitivity, pro jednoduchost vynecháváme. Takto bychom mohli znázornit část diagramu uspořádání přirozených čísel:



Toto uspořádání je hezké tím, že každé dva prvky lze porovnat. To ale obecně platit nemusí. Uspořádejme prvky $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$ podle inkluze, uspořádáním $\subseteq$:



Přirozená čísla je možné kromě standardního uspořádání uspořádat pomocí dělitelnosti: m "je menší než" n , právě když $m|n$. Dostaneme uspořádanou množinu $(\mathbb{N}, |)$. Ověřte si, že platí antisymetrie a tranzitivita (a vysvětlete, proč na celých číslech by nešlo o uspořádání). Na následujícím diagramu je vyobrazeno uspořádání přirozených dělitelů 20.



Podívejme se na několik užitečných druhů uspořádání:

Lineární uspořádání: O uspořádání řekneme, že je lineární, pokud každé dva prvky jsou navzájem porovnatelné (jeden z nich je menší než ten druhý). Také se mu říká řetězec, protože přesně tak by vypadal jeho diagram. Příkladem je standardní uspořádání na reálných, celých nebo přirozených číslech.

Dobré uspořádání: To vyžaduje, aby v každé neprázdné podmnožině nosné množiny (tj. množiny prvků, které uspořádáváme) existoval nejmenší prvek. Zejména to znamená, že každé dobré uspořádání musí být lineární, protože existují nejmenší prvky dvouprvkových podmnožin. Naopak ale lineární uspořádání nemusí být dobré – třeba standardní uspořádání na celých číslech je lineární, ale ne dobré, neboť celá množina nemá nejmenší prvek.

Dobrá uspořádání jsou důležitá, protože pro dobře uspořádané množiny lze zobecnit matematickou indukci. To, zda je možné libovolnou množinu dobře uspořádat, je tvrzení ekvivalentní axiomu výběru.

Antiřetězec: Antiřetězec je uspořádání, kde žádné prvky nejsou porovnatelné. Jakožto relace obsahuje jen dvojice stejných prvků a je to v jistém smyslu to nejmenší uspořádání, které na dané množině existuje.

Lexikografické uspořádání: Když uspořádáváme prvky, které jsou samy n -tice už uspořádaných prvků nějaké množiny, můžeme je uspořádat lexikograficky – jako ve slovníku. Nejprve porovnáváme podle první složky, pokud jsou stejné, podle druhé atd.

Například body v rovině reprezentované jako dvojice souřadnic můžeme uspořádat lexikograficky. Geometricky to znamená, že "čím víc je bod vpravo, tím je větší; a pokud jsou dva body stejně vpravo, větší je ten, který je výš".

Typicky lexikograficky uspořádáváme takové množiny, že původní uspořádání, pomocí kterého porovnáváme jednotlivé složky, je lineární. Potom i výsledné lexikografické uspořádání bude lineární.

2.1 Nejmenší a největší prvky

Často chceme mluvit o v nějakém smyslu nejmenších nebo největších prvcích nějaké množiny:

Definice: Necht $\leq$ je uspořádání na množině A . Prvek $a \in A$ nazveme *nejmenším prvkem*, pokud pro libovolné $b \in A$ platí $a \leq b$.

Duálně *největším prvkem* rozumíme prvek, který je větší než kterýkoli jiný.

Příklady: Standardně uspořádaná celá čísla nemají nejmenší ani největší prvek. Interval $(0, 1]$ má největší prvek 1, ale nemá nejmenší prvek. Přirozená čísla s nulou uspořádaná podle dělitelnosti mají nejmenší prvek 1 a největší prvek 0.

Definice: Necht $\leq$ je uspořádání na množině A . Prvek $a \in A$ nazveme *minimálním prvkem*, pokud neexistuje žádné $b \in A$ různé od a , pro které platí $b \leq a$.

Duálně *maximálním prvkem* rozumíme takový, že neexistuje žádný ostře větší.

Příklady: Pokud má množina nejmenší prvek, pak je to také její jediný minimální prvek. V antiřetězci je každý prvek minimální i maximální, ale (za předpokladu, že obsahuje alespoň dva prvky) nejmenší ani největší prvek neexistuje.

U největších a nejmenších prvků je často potíž s tím, že neexistují. Následující definice je motivovaná zejména tím, že suprema a infima existují pro všechny ohraničené neprázdné podmnožiny reálných čísel:

Definice: Necht $\leq$ je uspořádání na množině A a $B \subseteq A$ je nějaká podmnožina A . *Infimum* dané množiny, pokud existuje, je její největší dolní závora, tedy největší prvek takový, že je menší nebo roven libovolnému prvku z B .

Duálně *supremum* dané množiny, pokud existuje, je její nejmenší horní závora, tedy nejmenší prvek takový, že je větší nebo roven libovolnému prvku z B .

Příklady: Má-li množina nejmenší, respektive největší prvek, je jejím infimem, resp. supremem. Supremum množiny $\{3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; \dots\}$ v reálných číslech je π , její supremum v racionálních číslech neexistuje. V množině přirozených čísel uspořádaných dělitelností je infimum několika čísel rovno jejich největšímu společnému děliteli a supremum jejich nejmenšímu společnému násobku. V uspořádání množin podle inkluze (uspořádání $\subseteq$) odpovídají infima průniku a suprema sjednocení množin.

Trošku matoucí může být, co znamená infimum a supremum prázdné množiny. Infimum je největší dolní závora – pro prázdnou množinu je libovolný prvek dolní závo-

rou (jelikož prázdná množina nemá žádné prvky, jakékoli tvrzení "pro libovolný prvek z $\emptyset$..." triviálně platí). Největší dolní závora je tedy největší prvek celé množiny. Analogicky supremum prázdné množiny je nejmenší prvek.

3 Zobrazení mezi uspořádanými množinami

Když pracujeme s množinami, velmi často nás zajímají zobrazení mezi nimi. My jsme si na množinách definovali navíc nějakou strukturu – uspořádání. V takovou chvíli je přirozené se ptát, jestli zobrazení naši strukturu zachovávají. Pokud v naší množině jsou dva porovnatelné prvky, "hezke" zobrazení by je mělo zobrazit tak, aby obraz menšího byl menší než obraz většího.

Ale nejprve pár definic:

Definice: Zobrazení mezi množinami A a B je relace $f \subseteq A \times B$, taková, že každý prvek z A (vzor) je v relaci s právě jedním prvkem z B (jeho obraz). Namísto $(a, b) \in f$ píšeme $f(a) = b$.

Zobrazení se nazývá *injektivní*, pokud dva různé prvky mají vždy různé obrazy, a *surjektivní*, pokud každý prvek množiny B je obrazem nějakého (ne nutně jediného) prvku z A . Zobrazení, které je injektivní i surjektivní, se nazývá *bijekce*.

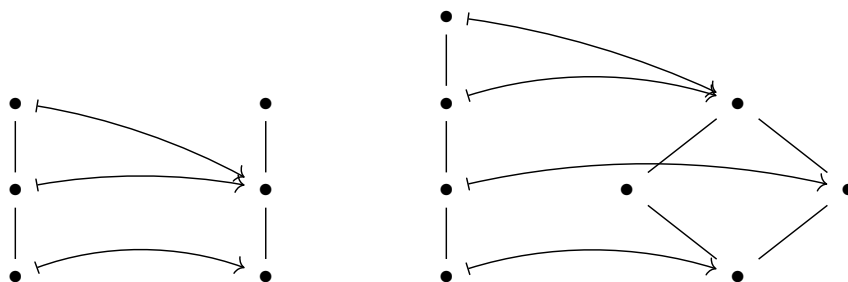
Každé bijektivní zobrazení $f : A \rightarrow B$ má inverzní zobrazení $f^{-1} : B \rightarrow A$, které každému prvku z B přiřadí jeho jediný vzor v A . Potom platí $f(f^{-1}(b)) = b$ a $f^{-1}(f(a)) = a$, tedy jejich složení v obou směrech jsou identity.

Definice: Zobrazení f mezi uspořádanými množinami $(A, \leq)$ a $(B, \leq)$ nazveme *izotonní*, pokud $a \leq b$ implikuje $f(a) \leq f(b)$ pro libovolnou dvojici prvků a, b .

Příklady: Každé konstantní zobrazení (zobrazení, které všechny prvky pošle na stejný obraz) je izotonní, protože nerovnost mezi obrazy plyne z reflexivity.

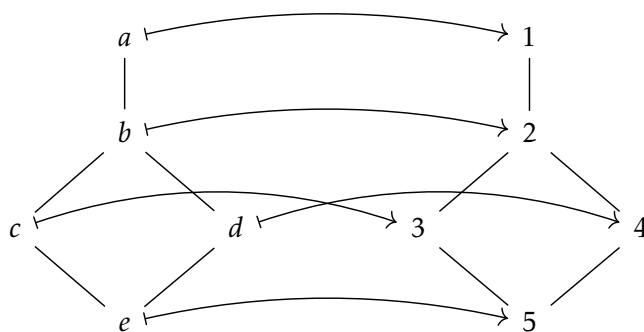
Definujme dvě různá uspořádání na množině $\mathbb{R}^2$ dvojic reálných čísel: $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$, pokud $a \leq c$ a zároveň $b \leq d$; a uspořádání $\leq$ lexikografické, tedy $(a, b) \leq (c, d)$, pokud $a < c$ nebo $a = c, b \leq d$. Potom zobrazení $(\mathbb{R}^2, \sqsubseteq) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \leq)$, které je na nosných množinách identita (každý bod zobrazí sám na sebe), je izotonní, ale inverzní zobrazení $(\mathbb{R}^2, \leq) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \sqsubseteq)$ izotonní není.

Další příklady (diagramy z puntíků a čar znázorňují uspořádané množiny, šipky s ocáskem ukazují, kam se který prvek zobrazí):

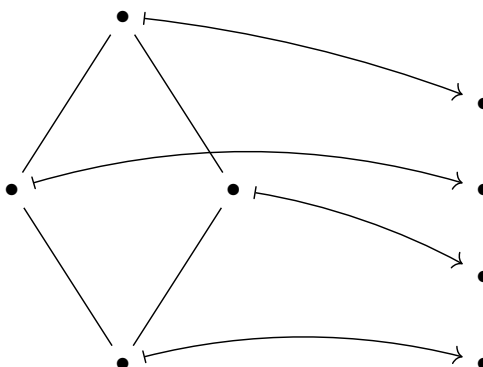


Definice: Zobrazení mezi dvěma uspořádanými množinami je *izomorfismus (uspořádaných množin)*, pokud je bijektivní a ono i jeho inverze jsou izotonní.

Izomorfismus můžeme chápat jako slabší verzi rovnosti mezi nějakými dvěma objekty (možná už jste slyšeli třeba o izomorfismech grup nebo jiných algebraických struktur). Když chceme říct, že dvě uspořádání jsou "stejná", vyžadovat striktní množinovou rovnost by bylo ve většině situací příliš silné – často se neptáme, jestli jsou totožné jakožto množiny (to znamená mají i stejné prvky), ale jen jestli mají stejnou "strukturu", jestli jsou uspořádané stejným způsobem:



Pozor, ověřit, že i inverzní zobrazení je izotonní, je důležité! Následující obrázek ukazuje zobrazení, které je izotonní bijekce, ale není izomorfismus (proč inverzní zobrazení není izotonní?):



4 Dualita

Stejně jako jsme na přirozených číslech uvažovali uspořádání $\leq$, mohli jsme pracovat i s *duálním* uspořádáním $\geq$. Obecně platí, že když celé uspořádání "obrátime vzhůru nohama" (formálněji vezmeme inverzní relaci), opět nám vznikne uspořádání (ne nutně stejné jako to původní). Toto jednoduché pozorování nám může ušetřit hromadu práce při důkazech:

Příklad 1: Dokažte, že pokud má uspořádání největší prvek, je to jeho jediný maximální prvek, a že pokud má nejmenší prvek, je to jeho jediný minimální prvek.

Řešení: Ukážeme nejprve první část. Předpokládejme, že máme uspořádanou množinu $(X, \leq)$ a její největší prvek m . Pripusťme, že existuje prvek $x \in X$, že $m \leq x$. Jelikož je m největší, platí také $x \leq m$, a z antisymetrie tedy $x = m$. Proto m je maximální.

Dále připusťme, že existuje jiný maximální prvek m' . I pro ten musí platit $m' \leq m$, a tedy pokud m' má být maximální, musí být $m' = m$. Dokázali jsme tedy, že je jediný.

Druhé tvrzení by se dalo dokázat velmi podobně, ale je to ještě snazší. Jeho pravdivost plyne přímo z prvního tvrzení: to jsme dokázali pro všechna uspořádání, tedy i pro uspořádání duální k libovolnému jinému. V tomto duálním uspořádání přejdou maximální prvky na minimální a největší na nejmenší. Pro ty musí platit první tvrzení, takže v původním uspořádání musí platit tvrzení k němu duální – to druhé.

Díky dualitě můžeme tedy z platného tvrzení o uspořádaných množinách vytvořit platné duální tvrzení systematickým nahrazením pojmů, které mezi sebou přecházejí. V tomto textu jsme potkali tyto dvojice:

největší prvek	nejmenší prvek
maximální prvek	minimální prvek
supremum	infimum

Příklad 2: Dokažte, že pokud supremum nějaké množiny existuje, je určeno jednoznačně. Z duality vyvoďte, že totéž platí pro infima.

Příklad 3: Dokažte, že v uspořádané množině existují suprema všech podmnožin právě tehdy, když existují infima všech podmnožin.