

BRněnský KOrespondenční Seminář



XXXII. ročník
2025/2026



Pomocný text ke 3. sérii
POSLOUPNOSTI

autor: *Adéla Heroudková*



Posloupnosti představují jeden ze základních objektů matematiky. Můžeme je najít v mnoha podobách, jak v úlohách z matematické olympiády, tak ve vyšší matematice. Jednak můžeme zkoumat jejich vlastnosti, ale můžeme je využít i k řešení jiných matematických problémů.

Velice užitečným nástrojem při práci s posloupnostmi je matematická indukce, které se budeme věnovat v druhé části studijního textu. Obecně je ale práce s posloupnostmi velice pestrá a nejde určit jeden přístup, který by vždy fungoval.

Základní pojmy

Posloupnost je funkce

$$a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n.$$

Zapisuje se jako $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ nebo jednoduše (a_n) .

Každému přirozenému číslu n je přiřazen právě jeden reálný prvek a_n , který nazýváme **n -tý člen posloupnosti**. Posloupnost může být definována několika způsoby: rekurentně, explicitním vzorcem nebo popisem určitého pravidla.

Typy a příklady posloupností

Rekurentně definovaná posloupnost: Taková posloupnost je definována na základě svých předchozích členů:

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + b.$$

Explicitně definovaná posloupnost: Taková posloupnost je definovaná pomocí hodnot reálné funkce v přirozených číslech

$$a_n = f(n).$$

Obě definice mají své výhody a nevýhody. Rekurentní vyjádření nám lépe ukazuje, jak se posloupnost chová. Též je velice užitečné při důkazech matematickou indukcí. Na druhou stranu pomocí explicitního vyjádření můžeme velice rychle získat hodnotu v n -tém členu.

Jsou posloupnosti, které jdou zadefinovat oběma způsoby. Uveďme si dva jednoduché příklady:

Aritmetická posloupnost: Jedná se o posloupnost, kde je rozdíl dvou po sobě jdoucích členů konstantní.

- Explicitní vyjádření: $a_n = a_1 + (n-1)d$.

- Rekurentní vyjádření: $a_n = a_{n-1} + d$

Konstanta d se nazývá **diference**.

Příklad: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...

Geometrická posloupnost: Zde je poměr dvou po sobě jdoucích členů konstantní:

- Explicitní vyjádření: $a_n = a_1 q^{n-1}$.
- Rekurentní vyjádření: $a_n = a_{n-1} q$

Konstanta q se nazývá **kvocient**.

Příklad: 1, 2, 4, 8, 16, 32, ...

Fibonacciho posloupnost: Jedná se o jednu z nejznámějších posloupností. A můžeme ji objevit nejen v různých částech matematiky, ale i v přírodních strukturách.

- Rekurentní vyjádření: $F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$
- Explicitní vyjádření:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Začátek posloupnosti: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 45, ...

Zde můžeme vidět příklad posloupnosti, kde sice explicitní vyjádření máme, ale s rekurentní definicí se nám bude pracovat o hodně lépe.

Fibonacciho posloupnost má spoustu zajímavých vlastností, které můžou přijít vhod i při řešení úloh z matematické olympiády a jsou hezky popsány na anglické Wikipedii Fibonacci sequence.

Recamánova posloupnost: Jedná se o příklad již složitěji definované posloupnosti

$$a_0 = 0, \quad a_n = \begin{cases} a_{n-1} - n, & \text{pokud } a_{n-1} - n > 0 \text{ a ještě se nevyskytlo,} \\ a_{n-1} + n, & \text{jinak} \end{cases}$$

Začátek posloupnosti: 0, 1, 3, 6, 2, 7, 13, 20, 12, 21, 11, 22, 10, ...

Další vlastnosti posloupností

Při řešení se může hodit zkoumat následující vlastnosti posloupností

- **rostoucí/klesající** – zda posloupnost monotónně roste či klesá,
- **omezená/neomezená** – zda existují hranice, které nepřekročí,
- **podposloupnost** – posloupnost vzniklá volbou části členů,

- **periodická** – existuje $k \in \mathbb{N}$ tak, že pro všechna n platí

$$a_{n+k} = a_n.$$

Nejmenší takové k nazýváme **perioda posloupnosti**. Příkladem je např.

$$a_n = (-1)^n \quad (\text{perioda } 2).$$

Matematická indukce

Matematická indukce je jedním z nejdůležitějších nástrojů při práci s posloupnostmi. Umožňuje například dokázat vzorce pro součty, rovnosti mezi členy nebo vlastnosti rekurentně definovaných posloupností. V mnoha případech je to nejpřirozenější (a někdy jediný efektivní) způsob, jak důkaz provést.

Pojďme si tedy ukázat, jak důkaz matematickou indukcí funguje.

- **Základní (Bázový) krok:** Ověříme, že tvrzení platí pro počáteční hodnotu (bázi), obvykle $n = 0$ nebo $n = 1$.
- **Indukční krok:** Předpokládáme, že tvrzení platí pro nějaké n (tomuto předpokladu říkáme **indukční předpoklad**), a ukážeme, že z toho nutně plyne platnost tvrzení i pro $n + 1$.

Pokud jsou oba kroky splněny, máme jistotu, že tvrzení platí pro všechna přirozená čísla.

Vyřešené příklady

Příklad 1: Najděte explicitní vzorec rekurentně definované posloupnosti (najděte a dokažte předpis pro n -tý člen)

$$a_0 = 3, \quad a_{n+1} = a_n + 1.$$

Řešení: Jedná se o jednoduchou rekurenci, kde se každý člen zvětší o 1. Někdy je užitečné rozepsat několik prvních členů:

$$a_1 = 4, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 6.$$

Vidíme tak pravidlo, které lze snadno zobecnit: po n krocích se k počáteční hodnotě 3 přičte n jedniček.

Nyní pomocí indukce ověřme, že skutečně platí vzorec:

$$a_n = 3 + n.$$

Základní krok: Pro $n = 0$ dostaneme $a_0 = 3 = 3 + 0$, a tedy vzorec skutečně platí.

Indukční krok: Předpokládejme, že pro n platí $a_n = 3 + n$. Nyní se podívejme na prvek a_{n+1} . Z definice víme, že

$$a_{n+1} = a_n + 1,$$

nyní můžeme použít indukční předpoklad

$$a_{n+1} = a_n + 1 = 3 + n + 1 = 3 + (n + 1).$$

Tudíž z indukce skutečně plyne, že

$$a_n = 3 + n.$$

Příklad 2: Dokažte, že pro Fibonacciho čísla platí

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1, \quad n \geq 1.$$

Tento vzorec je jedním z klasických vztahů pro Fibonacciho posloupnost a ukazuje, že součet prvních n členů lze vyjádřit jediným dalším Fibonacciho číslem.

Řešení: Provedeme důkaz indukcí.

Základní krok: Protože součet jde od F_1 a ne od F_0 je základní krok pro $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^1 F_i = F_1 = 1, \quad F_3 - 1 = 2 - 1 = 1.$$

Tvrzení tedy platí.

Indukční krok. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n , tj.

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1.$$

Chceme dokázat tvrzení pro $n + 1$. Sumu si můžeme rozepsat na následující součet

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \sum_{i=1}^n F_i + F_{n+1}.$$

Nyní můžeme využít indukční předpoklad a dostaneme

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \sum_{i=1}^n F_i + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1}.$$

Nyní použijeme rekurentní definici členů posloupnosti a dostaneme:

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_i = \sum_{i=1}^n F_i + F_{n+1} = F_{n+2} - 1 + F_{n+1} = (F_{n+2} + F_{n+1}) - 1 = F_{(n+1)+2} - 1.$$

Tím je indukční krok splněn a tvrzení platí pro všechna $n \geq 1$.

o.1 Dodatek k důkazu indukcí

Toto byly příklady dvou velice jednoduchých indukcí. Občas nestačí předpokládat, že dané tvrzení platí pro n , a z toho dokázat, že to platí pro $n + 1$. Mnohdy je lepší předpokládat, že tvrzení platí pro všechna $k \leq n$. Mohlo by se totiž třeba stát, že v indukčním kroku budeme potřebovat použít, že vzorec platí pro $n - 2$.

Dále se může stát, že budeme muset dělat indukci zvlášť třeba pro sudá a lichá čísla. Obecně indukce může mít mnoho podob, ale idea je vždy stejná: dokážeme něco pro bázi a pak dokážeme, že pokud nějaké tvrzení platí pro menší čísla, bude platit i pro větší číslo.

Upozornění: Bázový krok je velice klíčový, nikdy nepřeskakovat! Těž je důležité si vždy uvědomit, co je to nejmenší číslo, pro které tvrzení chceme dokázat. Může se třeba stát, že pro čísla 1, 2, 3 budeme muset tvrzení dokázat explicitně a indukce bude fungovat až od $n = 4$.

1 Zajímavé příklady s posloupnostmi

Příklad 3: Mějme rekurzivně definovanou posloupnost $a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}$. Předpokládejme, že $a_1 = a_{2012}$. Určete součet čtverců všech možných hodnot, kterých může nabývat a_1 . (Singapore Mathematical Olympiad 2012)

Příklad 4: Mějme rekurzivně definovanou posloupnost

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{n+3} \left(x_n + \frac{1}{2} \right),$$

kde $a_1 = \frac{1}{6}$. Určete hodnotu a_{2016} . (German Mathematical Olympiad 2016)

Příklad 5: Pro každé přirozené číslo $a_0 > 1$, definujme posloupnost $a_0, a_1, a_2, \dots$, jako

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n}, & \sqrt{a_n} \text{ je přirozené číslo} \\ a_n + 3, & \text{jinak} \end{cases}$$

pro každé číslo $n > 0$. Najděte všechny hodnoty a_0 , pro které existuje číslo A takové, že $a_n = A$ pro nekonečně mnoho hodnot n . (Problem 1, IMO 2017)