BRněnský KOrespondenční Seminář

XXXI. ročník
2024/2025

Pomocný text ke 4. sérii

KRUŽNICE

autor: *Anna Hronová*

1 Kružnice

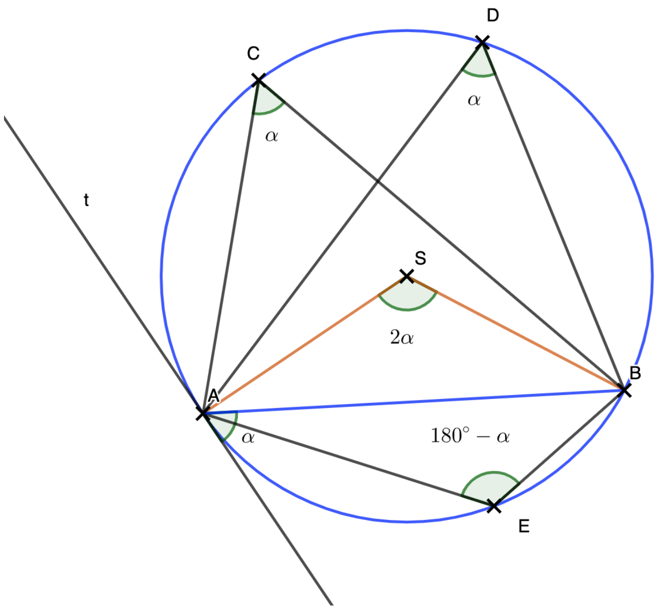
Podívejme se v této sérii na trochu geometrie. Přestože už slyším vaše povzdechy, nezoufejte. Podíváme se velice konkrétně na krásné kulaté objekty, kterým říkáme kružnice.

Definice: Kružnice je množina bodů se stejnou vzdáleností od středu.

Proč nás zrovna kružnice tak fascinují? Rovné útvary jsou pro začátečníky, ale těmi už my nejsme. Matematici z nějakých důvodů milují symetrie, symetrické objekty, proto je jasné, že kružnice bude středem jejich zájmu, je totiž extrémně symetrická - má dokonce nekonečně mnoho os souměrnosti procházející jejím středem, který je samozřejmě středem souměrnosti.

Při geometrických úlohách hrají kružnice klíčovou roli. Známe totiž spoustu vlastností kružnic, které nám pomáhají při řešení úloh, které využívají jako postup *úhlení*, nebo také vznešeně a po anglicku *angle chasing*.

Připomeňme si jen z obrázku pár základních vlastností kružnic a úhlů nacházejících se v jejich blízkosti.



Zafixujme si nějakou tětivu AB kružnice. Pak všechny ostré úhly, které se z kružnice „dívají“ na úsečku AB jsou shodné, říkáme jim *úsekové* a nechť mají velikost α. Úhel ASB

pak je dvojnásobný, tj. 2α a říkáme mu *středový*. Tupé úhly příslušně úsečce AB jsou také všechny stejné a mají velikost $180° - \alpha$. Pokud bychom sestrojili tečnu v jednom z bodů A nebo B úsečky AB, tak tato úsečka s tečnou spolu budou svírat *úsekový* úhel, který má také velikost α.

Domluvme se ještě dopředu, jaké budeme používat značení, standardně u trojúhelníku ABC budeme mít úhly α, β, γ, středy stran budeme značit S_a, S_b, S_c, střed kružnice opsané O, střed kružnice vepsané I, středy kružnic připsaným příslušným stranám jako E_a, E_b, E_c, výšky na příslušné strany v_a, v_b, v_c, paty výšek na příslušné strany jako P_a, P_b, P_c, průsečík výšek (neboli ortocentrum) jako H.

To je jen pár základních vlastností, které se nám budou hodit při řešení úloh a budování další zajímavé teorie týkající se kružnic. Základní rada zní, v geometrických úlohách hledej kružnice, a pak úhlit, úhlit a úhlit!

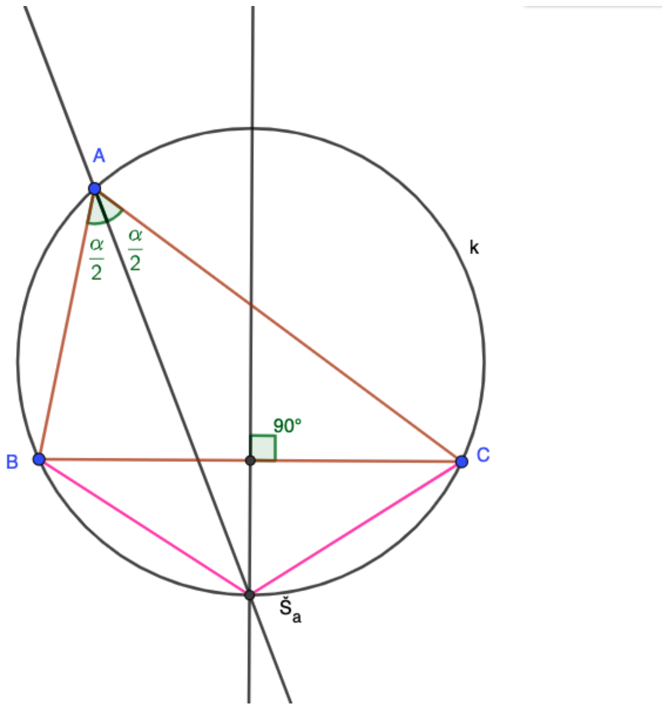
2 Švrčkův bod

Definice: Nechť ABC je trojúhelník, k je kružnice jemu opsaná. Pak střed oblouku BC, na kterém neleží bod A, nazýváme *Švrčkovým bodem* trojúhelníka ABC vůči straně a, značme $Š_a$.

Podobně pak samozřejmě můžeme dodefinovat i $Š_b$, $Š_c$. Co to je za bod a proč ho máme tak rádi?

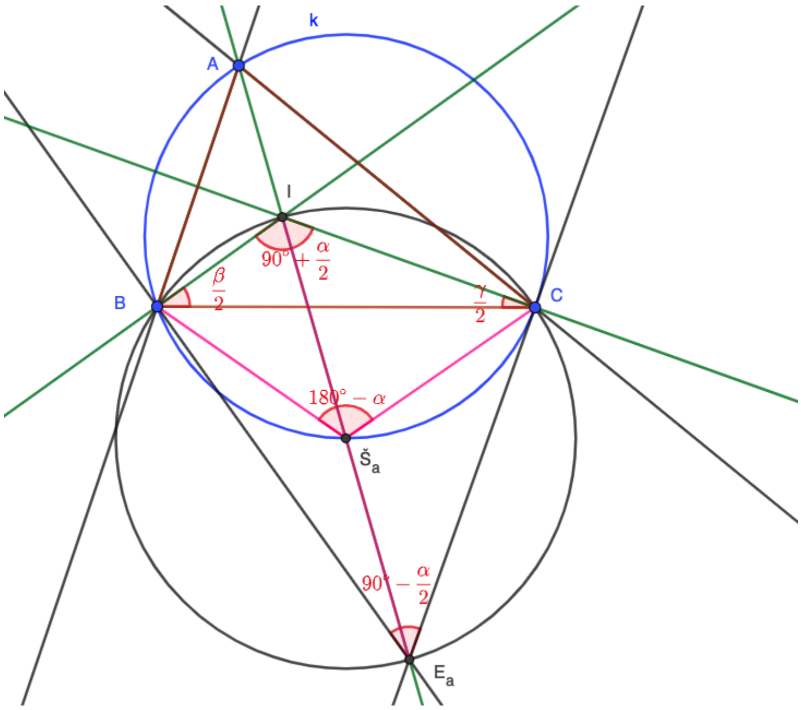
Věta 1: Osa úhlu α a osa strany a trojúhelníku ABC se protínají na kružnici jemu opsané.

Důkaz: Každou správnou geometrickou úlohu začínáme vždy velkým a barevným obrázkem.



Zjevně osa strany BC protne oblouk kružnice přímo ve Švrčkově bodě. Úsečky $B\check{S}_a$ a $\check{S}_aC$ jsou stejně velké, přísluší stejné kružnici, proto jim přísluší stejný úsekový úhel. Proto platí $|\sphericalangle BA\check{S}_a| = |\sphericalangle CA\check{S}_a|$ a bod Š proto leží i na ose úhlu α.

Věta 2: Body B, C, střed kružnice vepsané trojúhelníka ABC a střed kružnice připsané ke straně a leží na jedné kružnici se středem v Švrčkově bodě příslušnému straně a.



Důkaz: Bod I musí ležet na ose úhlu β, tedy $|\sphericalangle IBC| = \beta/2$. Bod E_a zase musí ležet na ose vnějšího úhlu *beta*, tedy $|\sphericalangle E_aBC| = (180° - \beta)/2$. Platí tedy, že $|\sphericalangle IBE_a| = 90°$. Stejně tak bychom ukázali, že $|\sphericalangle ICE_a| = 90°$. (Osy úhlů vnitřních a vnějších musí být na sebe kolmé vždy!)

Jestliže B se „dívá“ na IE_a pod pravým úhlem, stejně jako bod C, musí oba dva ležet na **Thaletově kružnici** nad IE_a. (Další kružnice, jak my je milujeme!) Přičemž střed této Thaletovy kružnice je samozřejmě ve středu úsečky IE_a. No a co dalšího leží na IE_a? Ano! Švrčkův bod! Všechny tři tyto body totiž leží na ose úhlu α trojúhelníku ABC. Zbývá už jenom dokázat, že je skutečně středem této úsečky. Vrhněme se na trochu úhlení. Z BIC dopočtěme, že $|\sphericalangle BIE| = 180° - \beta/2 - \gamma/2 = 90° + \alpha/2$. Protože leží na jedné kružnici, tak $|\sphericalangle BE_aC| = 180° - |\sphericalangle BIE| = 90° - \alpha/2$. Body $ABC\check{S}_a$ taky leží na kružnici a proto $|\sphericalangle B\check{S}_aC| = 180° - \alpha = 2 \cdot |\sphericalangle BE_aC|$.

Ukázali jsme, že úhel $B\check{S}_aC$ je středový úhlu BE_aC, Švrčkův bod proto musí být středem kružnice, na které leží B, C, I a E_a.

Řekněme si ještě (tentokrát už bez důkazu, abyste si mohli pocvičit :-) jedno zajímavé tvrzení týkající se Švrčkova bodu.

Věta 3: Střed kružnice vepsané je ortocentrem trojúhelníka tvořeného Švrčkovými body $\check{S}_a\check{S}_b\check{S}_c$.

BRKOS Team

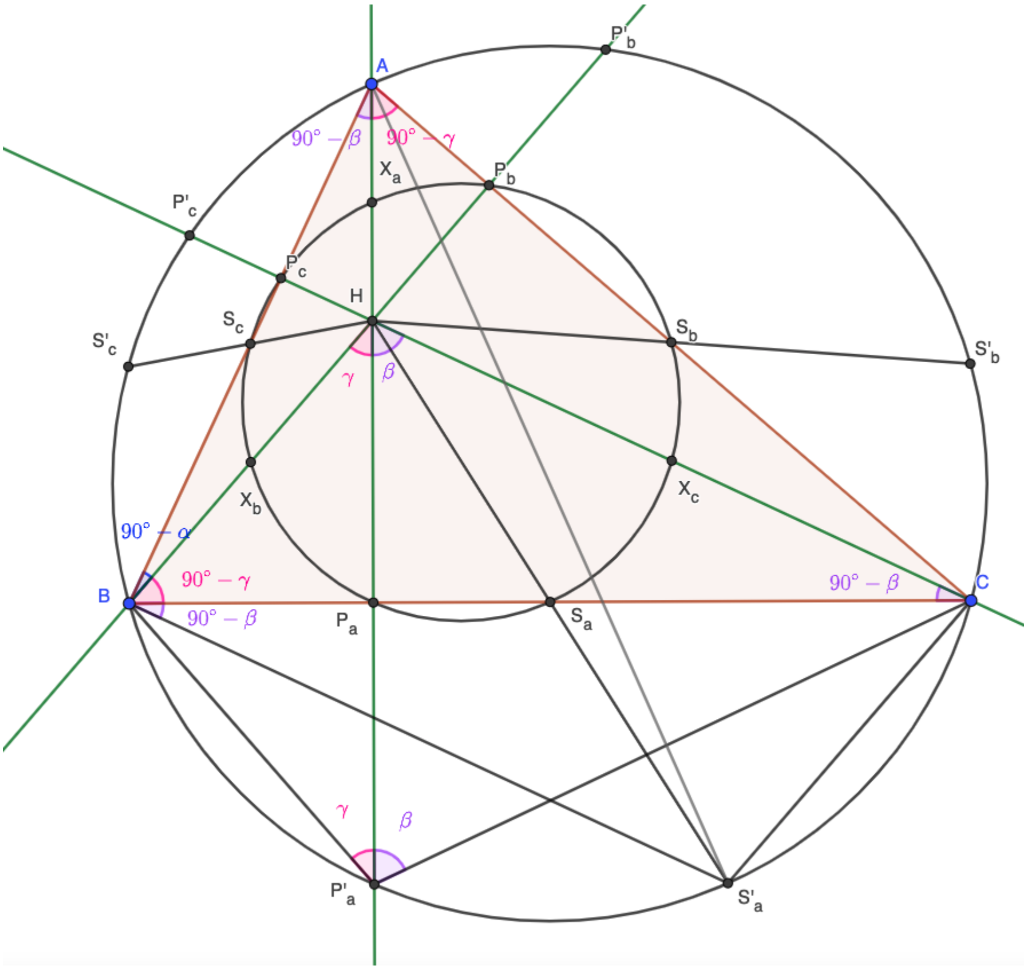
3 Feuerbachova kružnice

Každé tři body, co neleží na jedné přímce, určují jednoznačně kružnici. Proto říct, že tři body leží na kružnici, není zas takové terno, čtyři body, s tím už se dá trochu vařit, nějaké tětivové čtyřúhelníky, obvodové úhly. Nejsou ale i čtyři trochu málo?

Věta 4: Nechť ABC je trojúhelník. Středy stran S_a, S_b, S_c, paty výšek P_a, P_b, P_c a středy úseček určených vrcholy ABC a ortocentrem leží na jedné kružnici.

Důkaz: Nevím, jak rádi se prokousáváte důkazy. Mně se ale tento důkaz líbí velmi, protože uvidíme, že Feuerbachova kružnice není jediná kružnice, na které leží devět významných bodů. Je trochu trikový, ale využívá spoustu metod, které se hodí v geometrii znát.

Začneme tím, že budeme uvažovat kružnici opsanou trojúhelníku ABC a zobrazíme ortocentrum nejdříve v osové souměrnosti podle stran a pak ve středové souměrnosti podle středů stran.



Z trojúhelníku BP_bC určíme $|\sphericalangle BP_bC| = 90° - \gamma$, z trojúhelníku BP_cC určíme $|\sphericalangle BP_cC| = 90° - \beta$. Pomocí toho pak z trojúhelníku BP_aH určíme $|\sphericalangle BHP_a| = \gamma$ a z trojúhelníku CP_aH určíme $|\sphericalangle CHP_a| = \beta$. Protože P_a' je obraz H v osové souměrnosti podle strany a (přijměte prosím toto označení z obrázku), musí $|\sphericalangle BP_a'C| = |\sphericalangle BHC| = \beta + \gamma$. To dohromady s úhlem

$|\sphericalangle BAC| = \alpha$ dává 180°, proto P_a' leží na kružnici. Symetricky bychom i P_b', P_c' našli na kružnici opsané.

Analogicky bychom dokázali, že S_a', S_b', S_c', tedy obrazy H podle středů stran, leží na kružnici opsané.

K dokončení důkazu už zbývá jen říct, že kružnice opsaná devíti bodům je obrazem kružnice opsané ve stejnolehlosti se středem H a koeficientem 1/2. A jak říkává jeden velký matematik „Sedí-li pták na drátě, sedí i stín ptáka na stínu drátu." Čímž, v našem případě, se myslí, že pokud body $A, B, C, S_a', S_b', S_c', P_a', P_b', P_c'$ leží na kružnici k, tak i jejich obrazy, kterými jsou po řadě $X_a, X_b, X_c, S_a, S_b, S_c, P_a, P_b, P_c$ (kde X_a používáme pro značení středů úseček AH), leží na obrazu kružnice.

Rozmyslete si, jak by argumentace a obrázek vypadal v neostroúhlém trojúhelníku.

Tímto jsme, trochu ve zkratce, hotovi.

Definice: Kružnici z předchozí věty říkáme *kružnice devíti bodů*, nebo také *Feuerbachova kružnice*.

S pojmem Feuerbachovy kružnice úzce souvisí i tzv. *Eulerova přímka*.

Věta 5: Nechť ABC je trojúhelník, pak jeho ortocentrum H, težiště T, střed kružnice opsané O a střed jeho Feuerbachovy kružnice leží na jedné přímce.

Důkaz: Nastiňme jen, proč k takové věci dochází a tady tento fakt zmiňujeme zrovna u Feuerbachovy kružnice. Pamatujete si ještě, jak jsme polohu devíti bodů určili pomocí stejnolehlosti? Tak v této stejné stejnolehlosti (pun intended) musí i střed kružnice opsané přejít ve střed Feuerbachovy kružnice. Získáváme tedy tím rovnou, že H, O, F leží na jedné přímce. Proč tam ale leží i to těžiště? To vám neprozradím, zkuste posbírat všechny informace, které víte a dát to dohromady.

V případě rovnostranného ABC první tři body splývají, není už těžké rozmyslet si, kde bude ležet střed Feuerbachovy kružnice.

Definice: Nechť ABC není rovnostranný trojúhelník, pak přímce určené ortocentrem H, těžištěm T, středem kružnice opsané O a středem Feuerbachovy kružnice F, říkáme *Eulerova přímka*.

No jo, není holt oblasti matematiky, kde bychom nepotkali jméno Leonharda Eulera.

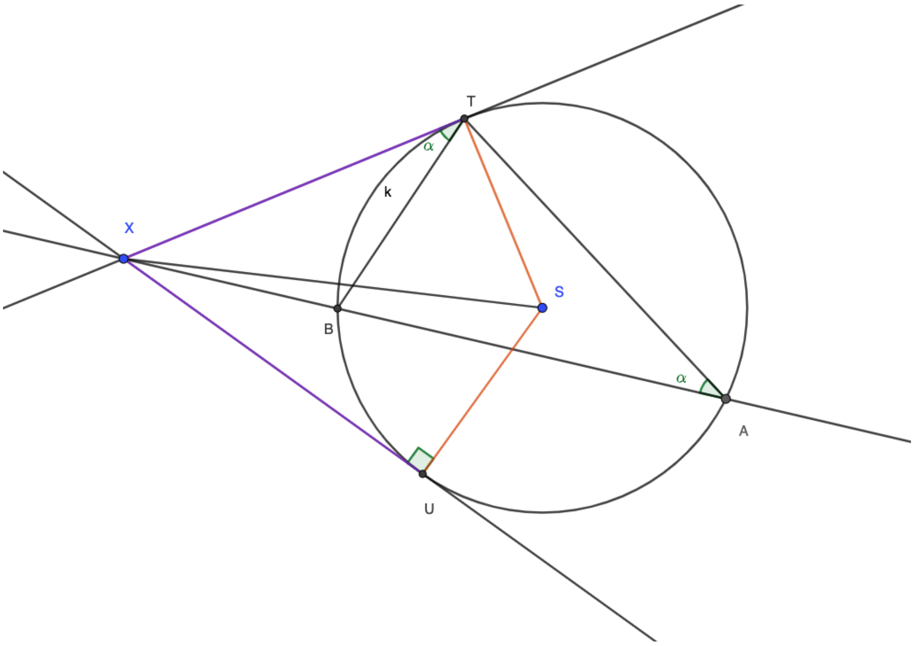
4 Mocnost bodu ke kružnici

Předchozí sekce se nám hodí zejména ve chvíli, kdy máme ukázat, že něco někde leží, něco se na něčem protíná. Pokud ale úloha pracuje s nějakými vzdálenostmi bodů, pak nám toho předchozí kružnice tolik neřeknou. V takovou chvíli je dobré mrknout se na zoubek podobnosti a hledat zejména podobné trojúhelníky. Jistou pomůckou nám pak může být něco, čemu se říká mocnost.

Příklad 1: Nechť X je vnější bod kružnice k. Tečna t ke kružnici k procházející bodem X se dotýká kružnice v bodě T. Dále nechť p je přímka procházející X, protínající kružnici

k ve dvou různých bodech, označme A, B. Ukažte, že $|XT|^2 = |XA| \cdot |XB|$.

ŘEŠENÍ: Doufám, že jste si to aspoň vyzkoušeli, než jste se podívali sem!



Úhel XTB je úsekovým úhlem úsečky TB, které přísluší úhel TAB, tedy jsou oba stejně velké. Pak trojúhelníky TXB a AXT jsou si podobné podle věty *uu*, mají ještě totiž společný úhel u X. Z čehož získáváme

$$\frac{|XT|}{|XB|} = \frac{|XA|}{|XT|}$$
$$|TX|^2 = |AX| \cdot |BX|$$

Vskutku to bylo tak jednoduché. Rozeberme si ale ještě, co všechno jsme tak triviálním cvičením získali. Je-li X vnější bod kružnice, tak jím prochází dvě tečny ke kružnici. Vzdálenost X je však od obou tečných bodů stejná. Povšimněme si dále, že nezáleželo v úloze na přímce p, ať bychom ji zvolili libovolně (stále by ale musela protínat kružnici k), pak by pořád součin vzdáleností $|XA| \cdot |XB|$ byl roven druhé mocnině vzdálenosti X od tečného bodu. Tato vzdálenost je jednoznačně určena bodem a kružnicí.

Definice: Nechť X je vnější bod kružnice k. Číslu $|TX|^2$ říkejme *mocnost bodu X ke kružnici k*, značme $M(X, k)$.

To však není všechno. Co by se stalo, kdyby X byl vnitřní bod kružnice? Pak bychom žádné tečny tvořit nemohli, však pro libovolné A, B, C, D na kružnici k, takové, že A, X, B a C, X, D leží na jedné přímce, platí $|XA| \cdot |XB| = |XC| \cdot |XD| = M(X, k)$.

Definice: Pro X vnitřní body kružnice dodefinujme mocnost bodu ke kružnici jako $M(X, k) = |XA| \cdot |XB|$ kde, A, B jsou body kružnice k, takové, že A, X, B leží na přímce. Pro body X ležící na kružnici položme $M = 0$

BRKOS Team

Spoustu příkladů s mocností se dá „zabít“ podobností trojúhelníku. Co je však silnější zbraní, budou následující tvrzení.

Věta 6: Nechť kružnice k má střed S a poloměr r, pak $M(X,k) = ||XS|^2 - r^2|$, pro libovolné X.

Definice: Nechť k, l jsou kružnice. Množinu bodů se stejnou mocností vůči oběma kružnicím nazýváme *chordálou*.

Věta 7: Chordála dvou nesoustředných kružnic je přímka kolmá na spojnici středů těchto kružnic.

Definice: Nechť $k_1, k_2, \dots k_n$, kde $3 \leq n \in \mathbb{N}$ jsou kružnice. Množinu bodů se stejnou mocností vůči všem kružnicím nazýváme *potenční střed*.

Věta 8: Potenční střed leží na průniku chordál všech dvojic kružnic.

5 Závěr

To by byl takový přehled hezkých vlastností kružnic, které se hodí znát při řešení geometrických úloh. Jestli bojujete s geometrickou úlohou, udělejte si velký, ne velký, přímo obrovský obrázek, vezměte arzenál barevných tužek, fixek a zaznačujte do toho obrázku všechno, co je stejné, všechno, co víte, a koukejte na to tak dlouho, než z toho něco kloudného vypadne. To je tip pro vás na řešení. Za nás opravovatele vás snažně prosím, do řešení udělejte další obrovský obrázek, popisujte věci barvičkami a rozumně pojmenovávejte, ať víme, co vy jste vykoukali. Díky a užijte si řešení!

BRKOS Team