BRněnský KOrespondenční Seminář

XXXI. ročník
2024/2025

Pomocný text ke 3. sérii

INVARIANTY

autor: *Lukáš Kycl*

1 O co jde

Tento text je určen pro všechny, kteří o invariantech nikdy neslyšeli, potřebují si o nich osvěžit znalosti, hledají tipy k jejich hledání anebo jsou jen zoufalí při řešení (nejen) našich úloh. První otázka je nasnadě – „Kdo je to ten invariant?“

Definice: Invariant je něco, co se s transformacemi nemění.

Okomentoval bych zde slovo transformace. Úlohy s invarianty typicky poznáte tak, že se v nich vyskytují nějaké kroky, změny, tahy (obecně matematicky řečeno, transformace). Podíváte-li se např. na zadání úloh v tomto studijním textu nebo na úlohy 3.1 – 3.4, všimnete si, že všechny obsahují nějaké postupné kroky.

Příklad 1: Ve čtverci $ABCD$ je na vrcholu A položena jedna mince, na vrcholu B dvě, na C tři a D čtyři. V každém tahu musíte na libovolné dva sousední vrcholy umístit na každý jednu minci. Může nastat situace, kdy je na všech vrcholech stejný počet mincí?

Řešení: Nepočítejme počty mincí na jednotlivých vrcholech, místo nich uvažujme součty mincí na dvojicích vrcholů $\alpha = A + C$ a $\beta = B + D$. Zajisté pokud mají být počty mincí na všech vrcholech rovny, musí platit $\alpha = \beta$. Přitom ale ať táhneme jakkoliv, přidáme k α i β právě jednu minci. Rozdíl mezi α a β se tedy nikdy nemění a na počátku platí $\alpha = 4, \beta = 6$, tedy požadovaná rovnost $\alpha = \beta$ nikdy nenastane. Tím jsme ukázali, že na všech vrcholech nikdy nebude stejný počet mincí.

Další vlastností úloh na invarianty je jejich různorodost a určitá "náhodnost"– občas jde o úlohy, které se nepodobají žádné jiné a člověka zprvu ani nenapadne, co by se na ně dalo použít. Přitom jakmile pak vhodný invariant naleznete, zbytek úlohy je již přímočarý.

Zde je na místě varování: Vzhledem k různorodosti úloh na invarianty neexistuje žádné doporučení, věta, komentář, který by platil univerzálně. Dále v tomto textu najdete spíše některé opakující se principy a typy úloh. Zejména neberte předchozí odstavce jako univerzální pravdu. U nejzrádnějších invariantů ani nemusíte poznat, že je máte hledat. Podívejme se na další dvě tradiční úlohy na invarianty.

Příklad 2: Lze koněm přeskákat po šachovnici 8×8 tak, abychom začali v jednom rohu, na každé pole skočili právě jednou a skončili v rohu protějším?

Řešení: Kůň při každém svém skoku změní barvu pole, na kterém se nachází. Pokud tedy stojí na bílém poli, může se posunout pouze na černé pole. K zadané cestě bude muset udělat 63 skoků, skončí tedy na poli opačné barvy než bylo to, na kterém začal. Pole v protějším rohu je ale stejné barvy jako pole počáteční, tedy naši cestu nelze zrealizovat.

Příklad 3: V $\mathbb{N}$ najděte všechna řešení rovnice $n + s(n) + s(s(n)) = 2024$.

Řešení: Operace ciferného součtu zachovává zbytkovou třídu modulo třemi (důkaz ponecháme čtenářovi). Např. pokud lze číslo n rozepsat jako $3k + 1$, pak lze $s(n)$ a $s(s(n))$ rozepsat jako $3l + 1$, resp. $3m + 1$ pro nějaká $k, l, m \in \mathbb{N}_0$. Pak dostáváme, že levá strana rovnice je rovna $3(k+l+m)+3$, tedy je dělitelná třemi. Stejná úvaha funguje i pro $n = 3k$ a $n = 3k + 2$. Tím jsme ukázali, že levá strana rovnice je vždy dělitelná třemi, přitom pravá strana třemi dělitelná není, což ukazuje, že rovnice nemá řešení.

Zmínil bych ještě jeden poznatek, který snad pečlivý čtenář již postřehl: Častěji než naopak úlohy na invarianty končí neexistencí zadaného prvku. Může se však také stát, že invariant řešitele navede na nějaký hezký způsob řešení.

Vtip 1: Na zkoušce z matematiky chce profesor po studentovi nakreslit graf funkce sinus. Po chvíli pozorování studenta pochválí: „Zatím to vypadá dobře.“ Student na to odpoví: „To je osa x, já jsem strašně nervózní.“

2 Klasické invarianty

Možná jste se podívali na řešení některé ze tří úloh v první části textu a řekli si, „Jak jsem na to měl jako přijít?“ Úlohy na invarianty často vyžadují nějaký zákeřný trik či postřeh. Abyste je našli, je potřeba trocha praxe, bystré oči a hodí se znát některé triky, které se v úlohách často opakují.

2.1 Algebraické vlastnosti

Často když se v úloze vyskytuje nějaká skupina čísel, je vhodné se zaměřit na nějakou jejich skupinovou vlastnost. Může jít o součet, součin, nějaké podíly, ale i těžší výrazy.

Příklad 4: Na tabuli máme napsána přirozená čísla od 1 do 416. V každém kroku si můžeme vybrat dvě čísla, smazat je a místo každého z nich napsat jeho dvojnásobek minus to druhé vybrané číslo. Kolik nejméně kroků je potřeba, aby součet všech čísel dosáhl 86400?

Řešení: Vybraná čísla si označme a, b. Místo čísla a napíšeme $2a - b$, místo b bude $2b - a$. Všimneme si však, že součet těchto dvou nových čísel je roven $a + b$, tedy součet všech čísel na tabuli se nezmění. Proto není možné, aby dosáhl hodnoty 86400.

2.1.1 Součet modulo n

V poměrně velké skupině úloh je invariantem součet modulo nějaké číslo.

Příklad 5: Zákeřný šotek jí Ádě ponožky. Každý den může sníst Ádě 10, 17 nebo 31 ponožek, při jiných počtech by si toho Áďa všimla. Přesto pokud jí daný den nějaké ponožky zmizí, Ádě to přijde zvláštní a večer si tři ponožky dokoupí. Před šotkovým příchodem měla Áďa 100 ponožek. Dokáže jí je šotek sníst všechny?

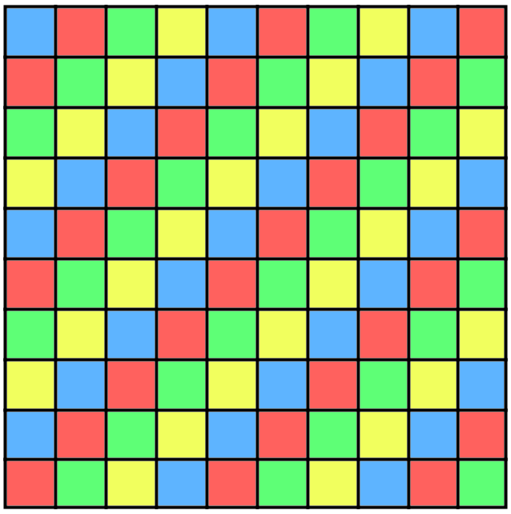
Řešení: Podíváme se na dělitelnost sedmi. Ať už šotek sní libovolný počet ponožek, s Ádiným nákupem za den vždy ubyde počet ponožek dělitelný sedmi. Avšak pozor, šotkovi k úspěchu stačí, aby v určitou chvíli byla Áďa bez ponožek. On sám ale jí vždy počty ponožek tvaru $7k+3$, k tomu aby uspěl tedy musí být počet ponožek stejného tvaru. Bohužel pro šotka však $100 = 14 \cdot 7 + 2$, tedy šotek všechny ponožky nesní.

2.2 Útvary a obarvení

Obarvení se často používá v různých obrazcích. Typicky je třeba si vhodně obarvit pole/body/hrany tak aby v každém tahu bylo něco splněno - např. v každém tahu byla použita každá barva. Počet potřebných barev se často nabízí, občas je třeba zkoušet.

Příklad 6: Lze vyplnit mřížku 10×10 obdélníky velikosti 4×1?

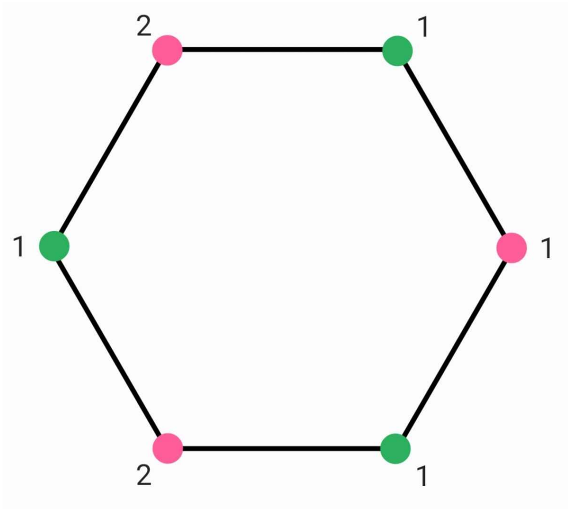
Řešení: Mřížku si obarvíme čtyřmi barvami. Pak vidíme, že při libovolném umístění obdélník zakryje čtyři pole, každé různé barvy. Přitom ale počty polí různých barev nejsou stejné - červených je 26, modrých a zelených 25 a žlutých 24. Do mřížky tedy nelze napsat 25 obdélníků, čímž jsme hotovi.



Hezčí řešení: použijeme pouze jednu barvu, červenou. Každý obdélník zakryje právě jedno červené pole, avšak obdélníků je 25, červených polí 26.

K následující úloze poskytnu pouze obarvení. Zbytek úvah je podobný těm, které se vyskytují v Příkladu 1.

Příklad 7: Ve vrcholech šestiúhelníku leží postupně 2,1,2,1,1,1 mince. V každém kroku přidáme na dva sousední vrcholy po jedné minci. Může být po konečném počtu kroků na všech vrcholech stejně mincí?



Vtip 2: Tonda je v hodině vyvolán k tabuli a učitelka mu povídá:
„Nakresli kruh a ve středu nakresli křížek!“
„Až ve středu? Vždyť je teprve pondělí…“

2.3 Hry

Hry mohou mít mnoho podob, často jde o šachovnice nebo souboje mezi dvěma hráči. Typickým šachovnicovým příkladem jsou pohyby koní a střelců - viz příklad 2. Pozor, některé šachovnice se mohou obarvovat, např. příklad 6 lze zadat jako šachovnici. Naopak hry mezi hráči mohou skrývat úplně cokoliv, třeba některý z již zmíněných invariantů.

Příklad 8: Packa a Mourek hrají hru *Chonker*. Na začátku hry mají tabulku čokolády $n \times n$ a střídají se v tazích. V jednom tahu může hráč rozlomit některou tabulku čokolády podle mřížky nebo sníst některou celou tabulku. Hráč, který sní poslední tabulku je chonker a prohrál. Má některý hráč vyhrávající strategii? Začíná Packa.

Řešení: Podíváme se na počet tabulek modulo dvěma. Nechť je Mourek na tahu a ve hře je sudý počet tabulek. Ať už jednu sní nebo rozlomí, Packa bude mít při svém tahu k dispozici lichý počet čokoládových tabulek. Obdobně po Packově tahu bude mít Mourek znovu k dispozici sudý počet čokoládových tabulek atd. Dostáváme se k tomu, že jelikož Packa začíná s lichým počtem tabulek (jednou), bude mít vždy k dispozici lichý počet tabulek, zatímco Mourek sudý. Mourek tak nemůže prohrát, protože by musel být na tahu s jednou tabulkou, což je liché číslo. Nejjednodušší Mourkova vítězná strategie je nechat Packu rozlomit první tabulku a jednu ze dvou tabulek sníst, Packa pak musí znovu rozlomit tabulku atd. až časem zbyde Packovi jediný čtvereček a prohraje.

BRKOS Team