BRněnský KOrespondenční Seminář

XXXI. ročník

2024/2025

Pomocný text k 1. sérii

Matematické důkazy

autor: *Adéla Heroudková*

Tento text má sloužit jako úplný základ k důkazům pro řešitele, kteří možná nikdy pořádný důkaz neviděli. Pokud jsi už někdy důkazy viděl, určitě ti tento text taky něco může dát a klidně můžeš přeskočit až na sekci Typy důkazů.

Důkaz - Co to vlastně je?

Než se důkladněji pustíme do tématu matematického důkazu, musíme si položit jednu otázku: Co je to vlastně matematika? To, co se učíme na základní škole a střední škole v předmětu matematika je spíše počítání, s matematikou to souvisí, ale od matematiky jakožto vědy je to poměrně daleko. To, co se učíme ve škole, je spíše důsledek matematiky. Hlavní rozdíl je v přístupu a použitých technikách. Vysvětleme si to na jednoduchých příkladech:

- Příklad 1: Spočítejte obvod kruhu s poloměrem 2 cm.

  Řešení: Vzoreček pro spočítání obvod je $2\pi r$, kde r je poloměr kruhu. Dosadíme-li do vzorce, dostaneme řešení, že obvod kruhu o poloměru 2 cm je $2 \cdot \pi \cdot 2 = 4\pi = 12,56637...cm$

- Příklad 2: Dokažte, že obvod kruhu o poloměru $2x$ cm je dvakrát větší než obvod kruhu o poloměru x cm pro libovolné kladné reálné číslo x.

  Řešení: Obvod kruhu spočítáme jako $2\pi r$, tudíž obvod první kruhu je $4x\pi$ a druhého kruhu je $2x\pi$. Když tyto čísla vydělíme dostaneme $4x\pi : 2x\pi = 2$, tudíž skutečně pro libovolné kladné reálné číslo x je obvod kruhu o poloměru $2x$ cm dvakrát větší než obvod kruhu o poloměru x cm. $\square$

První příklad je spíše početní a druhý je více matematický. V obou využijeme matematického výsledku, kterým je, že vzorec pro obvod kruhu o poloměru r je $2\pi r$. V prvním příkladu ho ale využijeme k tomu, abychom dostali konkrétní číselný výsledek. V druhém příkladě využijeme tohoto vzorce pro to, abychom odvodili obecné trvzení o kruzích a jejích obvodech. Řešením v prvním příkladě je výpočet, řešením v druhém příkladě je již zmiňovaný důkaz.

Důkaz bývá často řešením problému, který je natolik obecný, že výpočtem či podívám se na všechny možnosti je nemožné ho vyřešit. Podívejme se na nesprávné řešení druhého příkladu:

Nesprávné řešení 2. příkladu: Do vzorce pro obvod kruhu zkusíme dosadit dvojice čísel $1, 2$; $3, 6$; $1/2, 1$; $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$. Dostaneme postupně dvojice obvodů: $2\pi, 4\pi$; $6\pi, 12\pi$; $\pi, 2\pi$; $2\sqrt{2}\pi, 4\sqrt{2}\pi$. Vidíme, že obvod kruhu, co má dvakrát větší poloměr, je ve všech případech dvakrát větší než obvod prvního kruhu. Vyzkoušeli jsme dosadit celá čísla, racionální i iracionální, tudíž to bude platit vždy.

Toto řešení je neplatné, protože nám nedokazuje, že to bude skutečně platit i pro všechna ostatní kladná reálná čísla, kterých je nekonečně mnoho. Vyzkoušet si, že tvrzení, jehož obecnou platnost dokazujeme, skutečně platí pro nějaká jednoduchá čísla, není vůbec špatný začátek řešení daného problému. Nicméně to není řešení, ale pozorování, co potvrzuje, že to tvrzení skutečně asi platí. I když máte pocit, že když to platí pro tyto dvojice, musí to platit i pro ostatní, není to řešení, ale pouze matematická intuice. Bohužel matematická intuice není typ důkazu, protože to, že vy máte pocit, že to přece platit musí, protože jinak by matematika nedávala smysl, neznamená, že každý, kdo si ten důkaz přečte, bude sdílet stejný pocit.

Odpovědět na původní otázku: Co je to matematika? není vůbec jednoduché, nicméně můžeme si představit, co jsou ty největší pilíře matematiky:

- Definice
- Věta
- Důkaz

Když píšeme nějaký matematický text, prvně sepíšeme nebo připomeneme čtenáři definice základních pojmů, se kterými budeme pracovat. Například v případě našich příkladů bychom mohli připomenout definice pojmů kruh, poloměr a obvod. Následně větou, kterou se zabýváme je Příklad 2: Dokažte, že obvod kruhu o poloměru $2x$ cm je dvakrát větší než obvod kruhu o poloměru x cm pro libovolné kladné reálné číslo x. A naše řešení je důkaz této věty.

Je težké říct, co je to matematika, nicméně je jednodušší výsvětlit, co dělá matematik: Vymýšlí nové definice, zkoumá vlastnosti těchto nových věcí (nebo si postačí se starými známými pojmy) a píše o nich věty, které následně dokazuje.

(POZNÁMKA: Předchozí odstavec není uplně pravdivý. Protože máme-li nějaké tvrzení, u kterého matematici ještě neznají důkaz, neříká se mu věta, ale hypotéza. Takže korektněji by předchozí odstavec měl znít: ... a píše o nich hypotézy . . . , nicméně to je jen slovíčkaření. Příkladem hypotéz může být známá Riemannova hypotéza nebo Hypotéza prvočíselných dvojic (dvojčat).)

Typy důkazů

Naučit se psát důkazy není vůbec jednoduché a spousta studentů to pořádně neumí ani po vystudování matematiky na vysoké škole. Aby člověk mohl nějaký důkaz vymyslet, je dobré mít v zásobě nějaké základní typy důkazů, které na dané tvrzení může použít. V tomto textu důkazy rozdělíme do dvou kategorií: Podle důkazové techniky a podle části matematiky, ze které je tvrzení, které dokazujeme.

Důkazové techniky

Mezi základní typy důkazů patří přímý důkaz, důkaz sporem a důkaz indukcí. Nicméně na závěr si ještě předvedeme, jak se dá dokázat ekvivalence dvou tvrzení, což se při řešení úloh též často hodí.

1. Přímý důkaz

Důkaz přímo z předpokladů, pouze za pomoci logických úvah.

Jedná se o klasický důkaz, který budete používat nejčastěji. Přečtete si zadání, uvídíte přepoklady k danému příkladu a pokusíte se logicky odvodit, proč by tedy mělo být dané tvrzení pravdivé.

- Příklad 3: Dokažte, že součin dvou lichých čísel je opět liché číslo

  Řešení: Celé číslo je liché právě tehdy, když není dělitelné číslem 2. Mějme tedy libovolná lichá čísla k, l a jejich součin $m = k \cdot l$. Víme, že 2 nedělí ani k ani l, a protože 2 je prvočíslo, víme, že pokud nedělí ani jednoho z činitelů, nedělí ani jejich součin.

Ukázkou přímého důkazu je i řešení příkladu 2.

Dalším typem přímého důkazu je i důkaz protipříkladem. Pojďme si ukázat jeden nematematický příklad:

- Příklad 4: Rozhodněte, zda jsou všechny kytky červené.

  Řešení: Pampeliška je celá žlutá, tudíž není červená, a proto všechny kytky nejsou červené.

2. Důkaz sporem

Pokud negace (opak) předpokladu z tvrzení vede k nesmyslnému výsledku (ke sporu), je tedy tento opačný předpoklad nepravdivý, a tedy platí jeho negace - náš původní předpoklad.

U tohoto typu důkazu je důležité si uvědomit, co je negace předpokladu z tvrzení, které dokazujeme. Například negace předpokladu z příkladu 4, tedy, že všechny kytky jsou červené, není „všechny kytky jsou modré“, ale „existuje kytka, která červená není.“

Všimněme si, že u důkazu protipříkladem je poměrně nejasné rozhodnout, zda se jedná o přímý důkaz či důkaz sporem. Většinou záleží na formulaci jak původního tvrzení, tak na formulaci řešení. Například, kdybychom příklad 4 vyřešili a formulovali následovně, považovala bych ho za důkaz sporem. Nicméně idea důkazu je stejná.

- Příklad 4.b: Dokažte, že všechny kytky nejsou červené.

  Řešení: Tvrzení dokážeme sporem. Pokusme se tedy dokázat, že všechny kytky jsou červené (což je negace předpokladu ze zadání). Nyní si vezměme pampelišku. Pokud všechny kytky jsou červené, tak buď by musela být pampeliška červená nebo nebýt kytka. Nicméně pampeliška je žlutá kytka. Tudíž máme spor.

I příklad 3 jde vyřešit sporem:

- Příklad 3.b: Dokažte, že součin dvou lichých čísel je opět liché číslo.

  Řešení: Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme tedy, že existují nějaká dvě lichá čísla, jejichž součin je sudé číslo. Celé číslo je sudé, právě když je dělitelné dvěma. Dvojka je prvočíslo, tudíž pokud dělí součin, musí dělit alespoň jednoho z činitelů. Pokud dělí jednoho z činitelů, tak je tento činitel z definice číslo sudé, což je spor s tím, že oba činitelé jsou liché čísla.

Pojďme si ještě ukázat důkaz sporem jednoho méně zřejmého tvrzení.

- Příklad 5: Dokažte, že prvočísel je nekonečně mnoho.

  Řešení: Provedeme důkaz sporem. Předpokládejme tedy, že prvočísel je konečně mnoho, tudíž si je můžeme označit $p_1, \ldots, p_m$. Vezměme si číslo $a = p_1 \cdot \ldots \cdot_m + 1$, toto číslo není dělitelné žádným z prvočísel $p_1, ..., p_m$, tudíž jedinými děliteli tohoto čísla jsou 1 a a. Což implikuje, že a je prvočíslo, což je spor, protože a je o jedna větší než součin všech prvočísel, tudíž není v naší konečné množině prvočísel.

3. Důkaz indukcí

Důkaz tvrzení, které má platit pro všechny objekty nějaké množiny. Tuto množinu rozdělíme do menších podmnožin, které seřadíme dle velikosti tak, že větší množina má za podmnožinu všechny měnší podmnožiny. Začneme tím, že dokážeme tvrzení pro nejmenší podmnožinu. Následně dokážeme, že pokud toto tvrezní pro nějakou množinu, platí i pro množinu která je velikostně hned za ní.

Tato definice je trochu krkolomná. Ve většině případů budete něco dokazovat pro všechna přirozená čísla n. Následně postup bude vypadat následovně:

1. Dokážeme tvrzení pro jedničku
2. Dokážeme, že pokud tvrzení platí pro n platí i pro $n + 1$

Vysvětleme si možná tu ideu slovy. Mějme nějaké tvrzení, co platí pro jedničku. Zároveň víme, že pokud platí pro nějaké číslo n platí i pro $n + 1$. Potom z toho plyne, že tvrzení platí pro 2. Z toho plyne, že to tvrzení platí i pro 3, z toho plyne, že to platí i pro 4 atd.

Pochopitelnější tento přístup bude na příkladu:

- Příklad 6: Pro všechna celá čísla n platí: $1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

  Řešení: Provedeme matematickou indukcí:

  1. Tvrzení platí pro $n = 1$: $\frac{1(1+1)}{2} = 1$
  2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n a nyní dokažme, že platí pro $n+1$: Víme, že $1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$. Tuto rovnici upravíme tím, že na obě strany přičteme $n+1$:

     $$1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1).$$

     Na pravé straně vytkneme $n + 1$:

     $$1 + \cdots + n + (n+1) = (n+1)(\tfrac{n}{2} + 1) = (n+1)\frac{n+2}{2}.$$

     A dostaneme to, co jsme chtěli dokázat:

     $$1 + \cdots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

  Tudíž tvrzení platí pro všechna n.

BRKOS Team

4. Důkaz ekvivalence

Když dokážeme, že pokud platí první tvrzení musí platit i druhé, (tedy ukážeme, že první tvrzení implikuje druhé) a zároveň dokážeme, že pokud platí druhé tvrzení, platí i první tvrzení (tedy druhé tvrzení implikuje první), dokážeme tím, že tato dvě tvrzení jsou ekvivalentní (vždy tedy buď platí obě tvrzení, nebo ani jedno).

U tohoto typu důkazů je důležité to, že máme dvě tvrzení a chceme dokázat, že jsou ekvivalentní. Nesmíme proto zapomenout na obě strany implikace. Důkaz provádíme tak, že prvně předpokládáme platnost prvního tvrzení a z toho dokážeme, že v tom případě platí druhé tvrzení. Následně předpokládáme platnost druhého tvrzení a dokážeme, že pak platí i to první. Důkaz ekvivalence se tedy vždy skládá ze dvou dílčích důkazů!

Ekvivalenci často poznáme pomocí toho, že v zadání se objeví: (tvrzení A platí), PRÁVĚ KDYŽ (platí tvrzení B).

- Příklad 7: Dokážte, že šachovnici nxn jsme schopni beze zbytku vyplnit kostičkami domina 2x1, právě když je n sudé přirozené číslo.

  Řešení: Kostička domina zabírají na šachovnici dvě políčka, tudíž pokud chceme nějakou šachovnici vyplnit beze zbytku kostičkami domina, musí mít sudý počet políček. Tedy n musí být sudé.

  Naopak, pokud je n sudé, můžeme vždy šachovnici vyplnit tak, že dáme do sloupečku $\frac{n}{2}$ kostiček domina nad sebe.

U některých ekvivalencí se vám může stát, že oba dílčí důkazy budou velmi podobné. Nicméně i tak je potřeba druhý důkaz provést.

Naopak někdy se vám může stát, že dílčí důkazy budou velmi odlišné jako zde. Počet sudých políček je sice nutnost, ale určitě existují tvary o sudém počtu políček, které pomocí domina nezvládneme vyplnit. Proto bylo potřebné ukázat konkrétní konstrukci vyplnění šachovnice.

Důkazy v různých částech matematiky

V následující části si řekneme nějaké rady, jak přistupovat k důkazům v jednotlivých odvětvých matematiky či lehké způsoby, jak příklady řešit. Prvně si vždy zjednodušeně vysvětlíme, co si pod daným oborem představujeme, abychom byli schopni rozeznat, z jaké části matematiky je daný příklad.

1. Teorie čísel

Teorie čísel zkoumá celá čísla a dělitelnost.

Pojďme si ukázat dva příklady, na kterých si předvedeme dva jednoduché přístupy k řešení příkladů z teorie čísel.

Dělitelnost na obou stranách rovnice - Pokud má platit rovnost mezi celými čísly, musí platit, že pokud je jedna strana rovnice dělitelná nějakým celým číslem, musí jím být dělitelná i druhá strana.

- Příklad 8: Dokažte. že pro žádné přirozené $n > 0$ neplatí rovnost $7^n + 7 \cdot 4^n = 6^n$.

Řešení: Levá strana rovnice je dělitelná sedmi, pro všechna přirozená n, ale pravá strana pro žádné n sedmi dělitelná nebude, takže rovnost pro žádné n nemůže platit.

Zbytky po dělení celým číslem - Jednou z věcí, co můžeme při řešení příkladu z teorie čísel udělat je se podívat na zbytky po dělení nějakým číslem.

- Příklad 9: Dokažte, že pro každé přirozené číslo n je vždy právě jedno z čísel v trojici n, $n+4$, $n+8$ dělitelné třemi.

  Řešení: Rozdělme řešení na tři případy:

  1. n je dělitelné třemi, tedy $n = 3k$, pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Potom $n+4 = 3k+4 = 3(k+1)+1$, tedy číslo $n+4$ není dělitelné třemi, protože dává zbytek jedna po dělení třemi. A $n+8 = 3k+8 = 3(k+2)+2$ a tedy číslo $n+8$ též není dělitelné třemi.

  2. Nechť $n = 3k+1$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Potom n není dělitelné třemi. Stejně tak $n+4$, protože $n+4 = 3k+5 = 3(k+1)+2$. Ale pro $n+8$ platí $n+8 = 3k+9 = 3(k+3)$, takže je dělitelné třemi.

  3. Nechť $n = 3k+2$, pro nějaké $k \in \mathbb{N}$, takže n není děltelné třemi. Naopak nyní bude platit $n+4 = 3k+6 = 3(k+2)$, takže $n+4$ je dělitelné třemi. Ale $n+8$ už dělitelné třemi nebude, protože $n+8 = 3k+10 = 3(k+3)+1$.

  Protože jsme prošli všechny možnosti pro n a ve všech to platilo, dokázali jsme, že tvrzení skutečně platí.

V teorii čísel můžeme vyřešit spoustu příkladů právě tím, že se podíváme na to, jaké zbytky dávají různá čísla ze zadání po dělení nějakým vhodným číslem, či tím, že se podíváme, jakými čísly jsou čísla ze zadání dělitelná. Důležité je, že v obou příkladech vystupovala celá čísla. Kdyby v prvním příkladu bylo n reálné a ne přirozené, argument s dělitelností bychom použít nemohli.

2. Algebra

Algebra: zkoumá výrazy a vztahy mezi nimi (rovnosti, nerovnosti, atd.)

Nyní si pojďme ukázat, dva jednoduché přístupy k řešení příkladů z algebry.

Úprava na čtverec - Úprava na čtverec (pro ty z vás, co tento pojem neznají ze střední) znamená, že upravíme výraz tak, abychom tam získali výraz $a^2+2ab+b^2$. Následně tento výraz upravíme na $(a+b)^2$, což je druhá mocnina (proto úprava na čtverec) o které vím, že má pro všechny reálná čísla hodnotu větší nebo rovno nule. To může být často velice výhodne, obzvláště při řešení nerovnic.

- Příklad 10: Dokažte, že pro libovolná reálná x a y platí nerovnost:$x^2+y^2 \geq 2xy$

  Řešení: Převedeme si $2xy$ na druhou stranu nerovnosti a dostaneme:

  $$x^2+y^2-2xy \geq 0$$

  $$(x-y)^2 \geq 0$$

  Tato nerovnost určitě platí, protože druhá mocnina libovolného reálného čísla je větší nebo rovna nule. A naše původní nerovnost je vytvořena ekvivalentními úpravami z této nerovnosti, tudíž musí platit taky.

BRKOS Team

Obecně při řešení nerovností, když všechny výrazy dáte na jednu stranu, řešíte problém, kdy chcete ukázat, že nějaký výraz je větší než nula. Často se dá zdlouhavým upravováním výrazů takto nerovnost vyřešit, ale nejde to vždy a utěžších nerovností pravděpodobně existuje i hezčí řešení. Ale je to určitě dobrý začátek.

AG nerovnost - Na řešení nerovností se často využívají již známé nerovnosti, jako například nerovnost aritmetického a geometrického průměru (krátce AG nerovnost). Pro množinu n nezáporných reálných čísel totiž platí, že jejich aritmetický průměr je vždy větší než jejich geometrický průměr. Zapsáno pomocí symbolů tedy:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot \cdots \cdot x_n}.$$

- Jiné řešení příkladu 10: Z AG nerovností víme, že platí:

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2}.$$

  Po vynásobení dvěma dostaneme, že tedy platí i nerovnost:

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Sčítání rovností (nerovností) - častým algebrickým příkladem bývají soustavy rovností a nerovností. Dobrým začátkem jejich řešení bývá jejich vzájemné sčítání a odčítání.

- Příklad 11: Najděte všechna reálná řešení x, y soustavy rovnic:

$$y^2 - xy - 3 = 0,$$

$$x^2 - xy + 3 = 0.$$

  Řešení: Když rovnice sečteme dostaneme:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 0,$$

$$(x - y)^2 = 0.$$

  Vydíme, že by muselo platit $x = y$. Když však dosadíme $x = y$ do kterékoliv z původních rovnic, platit nebude, tedy soustava nemá žádné řešení.

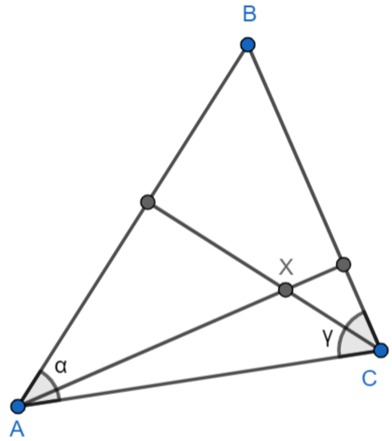
3. Geometrie

Geometrie: zkoumá rovinné a prostorové objekty.

V geometrii je při důkazech nejdůležitější kreslit obrázky a v nich si přehledně vyznačovat informace. Za prvé je to důležité, abyste to vyřešili, za druhé je to důležité, aby váš důkaz někdo i pochopil.

Úhlování - jedná se o velice efektivní metodu, kdy postupně doplňujete informace o úhlech v obrazci ze zadání a děláte to tak dlouho, dokud to jde nebo dokud nevyčtete vše důležité.

- Příklad 12: Mějme ostrúhlý trojúhelník ABC. Vezměme si výšku z vrcholu A a výšku z vrcholu C. Ty se protnou v bodě X. Označme α vnitřní úhel u vrcholu A a γ vnitřní úhel u vrcholu C. Dokažte, že velikost úhlu AXC je rovna $\alpha + \gamma$.



Řešení: Protože se jedná o výšky, víme, že úhly ADC a CEA jsou pravé. Dále z toho, že každý trojúhelník má součet velikostí vnitřních úhlů 180° dopočítáme, že velikost úhlu EAC a ACD. Prvně si vezmēmě trojúhelník AEC :

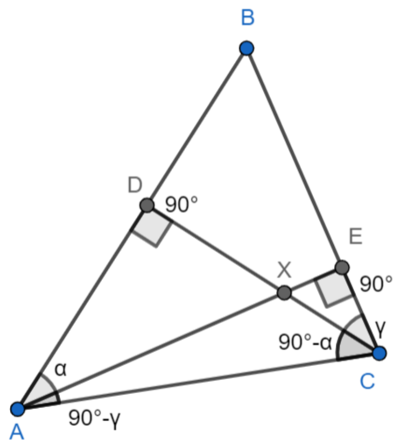
$$|\sphericalangle EAC| + 90 + \gamma = 180,$$

$$|\sphericalangle EAC| = 90 - \gamma.$$

Nyní se podívejme na trojúhelník ADC:

$$|\sphericalangle ACD| + 90 + \alpha = 180,$$

$$|\sphericalangle ACD| = 90 - \alpha.$$



Nyní známe velikosti tří úhlů v trojúhelníku AXC a můžeme tedy dopočítat velikost úhlu AXC:

$$|\sphericalangle EAC| + |\sphericalangle ACD| + |\sphericalangle AXC| = 180,$$

$$90 - \gamma + 90 - \alpha + |\sphericalangle AXC| = 180,$$

$$|\sphericalangle AXC| = \alpha + \gamma.$$

Tudíž skutečně platí, že velikost úhlu AXC je roven $\alpha + \gamma$.

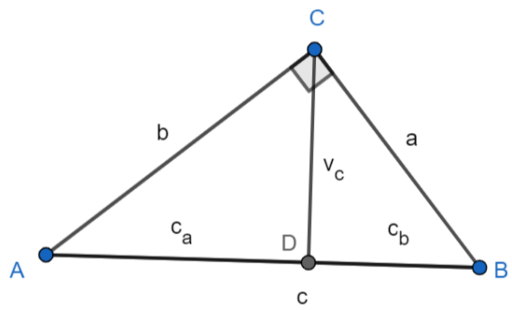
BRKOS Team

V komplikovanějších příkladech si nevystačíte jen s dopočítáváním úhů do 180°, ale budete muset využít například úhly souhlasné či střídavé nebo různé vlastnostni úhlů v kružnici.

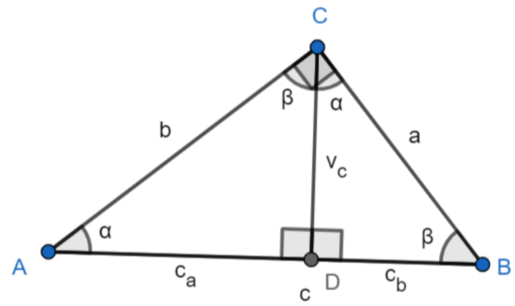
Podobnosti trojúhelníků - dva trojúhelníky jsou si podobné, pokud se jedná o dva trojúhelníky, kde jeden z nich je zmenšená (a často pootočená) varianta toho druhého. Vlastnosti podobných trojúhelníků využíváme obzvlášť když potřebujeme pracovat s velikostmi stran daného objektu a nevystačíme si pouze s úhly.

Důležitá vlastnost podobných trojúhelníků pro dokazování věcí v geometrii je, že poměr jejich stran je stejný. Tím, že jeden je menší, mají sice stejně velké úhly, ale už nemají stejně dlouhé strany. Nicméně poměr stran zůstává stejný. Tedy například, pokud poměr stran jednoho trojúhelníku je 1:2:4 tak i poměr stran zmeněeného trojúhelníku je 1:2:4.

- Příklad 13: Mějme pravoúhůý trojúhelník ABC s pravým úhlem u vrcholu C. Mějme výšku z vrcholu C a pojmenujme si ji v_c a její patu pojmenujme bod D. Bod D dělí stranu c na dvě úsečky AD a DB. Tyto dvě úsečky pojmenujme c_a a c_b. Dokažte, že platí $v_c{}^2 = c_a \cdot c_b$.



Řešení: I u paty výšky v_c jsou pravé úhly. Pojmenujme úhly u bodů A a C jako α a β. Pak musí platit $|\sphericalangle DCA| = \beta$ a $|\sphericalangle BCD| = \alpha$.



Z toho, že trojúhelníky ADC a DCB mají stejné úhly plyne, že jsou si podobné. Tudíž mají stejné poměry stran. Z toho plyne, že

$$\frac{c_a}{v_c} = \frac{v_c}{c_b}.$$

Tuto rovnost již lehce upravíme na $v_c{}^2 = c_a \cdot c_b$.

BRKOS Team

4. Kombinatorika

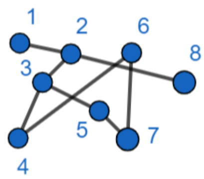
Kombinatorika: zkoumá existenci nebo počet objektů, které splňují nějaké podmínky.

Úlohy z kombinatoriky je trochu náročnější definovat. Obecně v našem semináři nebo v matematické olympiádě narazíte na tři typy možných kombinatorických příkladů: příklady na počet možností, příklady na vyplňování tabulek, příklady na grafy.

Příklady na počet možností jsou většinou početní a ne dokazovací. Na jejich řešení si často vystačíme se znalostí kombinačních čísel a vzorců, o kterých jste se učili (nebo budete učit) ve škole.

Příklady na práci s tabulkou (často s šachovnicí) bývají asi nejtypičtější. Při jejich řešení teoreticky není potřeba ničeho jiného než logického přemýšlení. Nicméně různé věci vám můžou práci usnadnit, jako například znalost matematické indukce či znalost důkazu sporem.

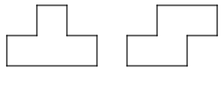
Příklady na grafy bývají trochu těžší. Grafem není myšlen například koláčový graf, který můžeme vidět v televizních novinách, ale graf jakožto množinu vrcholů a hran mezi vrcholy. Jako například následující graf:



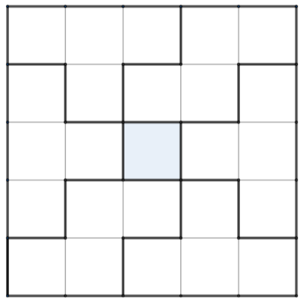
Konstrukce - často se nás v kombinatorických příkladech ptají, zda něco jde sestrojit, případně na nějaké minimum či maximum dané konstrukce.

Důležité je, že v obou případech budete muset danou věc skutečně zkonstruovat a ne pouze prohlásit, že by to mělo jít. V případě minima/maxima u nějaké konstrukce (například největší počet kostiček, který se vleze do tabulky), musíme dokázat, proč nic menšího/většího v tabulce být nemůže a dát konstrukci tohoto minima, abychom ukázali, že to skutečně jde.

- Příklad 14: Mějme tabulku 5x5 a chceme ji co nejvíce vyplnit. Máme k dispozici pouze dílky o tvaru dvou tetronym (viz obrázek). Kolik nejvíce takovýchto dílků můžeme do tabulky poskládat tak, aby se nepřekrývaly a zároveň nevyčuhovali z tabulky.



Řešení: Tabulku můžeme vyplnit následujícím způsobem:



V tabulce nám zbyde pouze jedno prázdné políčko uprostřed, To znamená, že víc než 6 dílků do tabulky dát nemůžeme, protože každý dílek zabírá 4 čtverečky a dílky se nemají překrývat ani vyčuhovat z destičky.

U tohoto typu úloh je důležité, že nemusíte říkat, jak jste došli k tomuto vyplnění tabulky, důležité je, že se vám to povedlo. Ta podstatná část, kterou musíte naopak dokázat, je, že víc dílků už do tabulky neposkládáme.

Invariant - jedná se nějakou věc, která se nemění. Když nějaký invariant v úloze objevíme, může nám to značně ulehčit řešení.

Podívejme se na Příklad 14, zde jsme mohli najít invarinat v počtu polí, které pokryjou tetronima. Ty totiž vždy pokryjou počet políček dělitelný čtyřmi. Kdyby tedy předchozí úloha byla formulovaná jako 'Které tabulky $n \times n$, pro kladné přirozené n, můžeme těmito tetronimy beze zbytku vyplnit?', mohli byste rovnou říct, že pro liché n to nejde, protože zde počet políček není dělitelný čtyřmi.

Ukažme si invarianty na příkladě, který je kombinací teorie čísel a kombinatoriky.

- Příklad 15: Mějme čísla 1 až 1000 napsané na tabuli v řádku. Do druhého řádku pod dané číslo napišme ciferný součet tohoto čísla. Ve třetím řádku zopakujeme to samé pro čísla druhého řádku. Takto pokračujeme než dostaneme řádek se samými jednocifernými čísly. Bude v daném řádku víc 1, nebo 2?

  Řešení: I když máme cifer deset, v našem posledném řádku se jich bude vyskytovat pouze devět různých, protože nulu jako ciferný součet nikdy dostat nemůžeme.

  Podíjme se na libovlné číslo $\overline{abc}$ (takto značíme ciferný zápis celého trojciferného čísla). Ciferný součet tohoto čísla tedy bude roven $a+b+c$. Nyní se podívejme jaký dává číslo $\overline{abc}$ zbytek po dělení devíti. Toto číslo si můžeme napsat jako $(99+1)a+(9+1)b+c = 99a+9b+(a+b+c)$ tedy číslo $\overline{abc}$ dává stejný zbytek po dělení devíti jako jeho ciferný součet.

  Toto je náš invariant, protože z toho plyne, že v každém řádku budou dávat čísla postupně zbytky 1,2,...,9,1,2,...,9,1,2... po dělení devíti. Tudíž i na poslendím řádku toto bude platit, z čehož plyne, že přesně takto bude vypadat poslední řádek: 1,2,3,...,9,1,2,... Po číslo 999 tedy bude na poslendím řádku stejný počet jedniček a dvojek, ale číslo 1000 má ciferný součet 1, tudíž jedniček bude vy výsledku o jedna víc.

Jak bylo vidět z řešení, invarianty můžou být velice náhodné a přijít na ně není vůbec jednoduché. Nicméně po spočítání značného množství příkladů přijdete na to, jaký typ invariantu kde hledat.

Stejně jako u konstrukce platí, že ve svém řešení nemusíte popisovat celou cestu, jak jste k invariantu dospěli, důležité je, že funguje.

BRKOS Team

1.1 Závěr: jak na důkazy

Už jsme si představili, co to takový důkaz je, jaké jsou typy důkazů a jaké metody můžeme využívat v různých příkladech. Zbývá tedy zodpovědět, jak na takový důkaz přijít a jak ho pak sepsat.

1.1.1 Jak vymýšlet důkazy?

Když vymýšlíme důkaz k nějaké úloze, je dobré si napsat předpoklady daného příkladu. Na ukázku použijme příklad 12, kde předpoklady jsou: ABC je ostroúhlý, bod X je průsečík výšky z vrcholu A a výšky z vrcholu B, úhel u vrcholu A je α a úhel u vrcholu B je β.

Následně je dobré si napsat (a klidně dvakrát podtrhnou), co chceme dokázat. V našem případě chceme dokázat, že **velikost úhlu** AXC **je rovna** $\alpha + \beta$.

Potom je dobré se zamyslet nad přepoklady a napsat si, co všechno víme. Například, že všechny výšky se protnou vždy v jednom bodě, výšky v ostroúhlém trojúhelníku se protnou uvnitř tohoto trojúhelníku, u paty výšky je pravý úhel nebo, že trojúhelník má v součtu vždy 180°.

Následně se zamyslíte, které tyto vlastnosti můžete využít k řešení a pokusíte se o to. Občas se vydáte cestou, která nikam nevede, občas se vydáte správným směrem a dostanete s k výsledku. Občas využijete jen některé věci, co jste si napsali, občas využijete všechno. Často si během řešení vzpomenete na další vlastnosti, které můžete využít a vydáte se ve svém řešení úplně jiným směrem.

Důležité je mít po ruce hodně papírů a systematicky si zapisovat, co děláte. Protože pokud nebudete pořádní, může se stát, že se dostanete někam, odkud už plyne řešení – ale do toho místa jste se dostali tak chaoticky, že už nezvládnete svůj postup znovu provést.

A úplně nejdůležitější je se nevzdávat. V matematice je krásné to, že každá věta se dá dokázat mnoha, někdy opravdu různými, způsoby. Takže není pouze jedna cesta, která vede k cíli, a každý přichází na důkazy jinak. Někdo bude dvě hodiny sedět, nevědět nic a pak ho možná napadne velice krátký a kreativní důkaz. Někdo si zas sedne a bude velice systematicky počítat pomocí vzorců a věcí, co zná, a dopočítá se velice zdlouhavým způsobem k cíli. Ani jeden postup není špatně, protože oba vedou ke správnému výsledku. (Nicméně krátké a kreativní důkazy se daleko líp opravují :D)

1.1.2 Jak psát důkazy?

Je důležité si uvědomit, že vymýšlení a sepisování důkazů jsou dvě rozdílné věci.

Když vymýšlíte důkaz, nikdy ho rovnou nepište. Vymyslete ho zvlášť a pak se ho pokuste sepsat.

Není špatné začít opět tím, že si napíšete předpoklady úlohy, napíšete, co chceme dokázat a pak napíšete vlastnosti, co plynou z předpokladů, které jste skutečně použili. Je například pěkné, že víte, že se všechny tři výšky v trojúhelníku protínají v jednom bodě, ale pokud jste to při řešení nakonec nepoužili, je zbytečné to v důkaze psát.

Následně se snažíte svůj postup sepsat tak, aby byl srozumitelný (a pokud píšete na papíře, tak ČITELNÝ). Může se stát, že myšlenka je správně, ale opravující vašeho důkazu ji nepochopí a může vám strhnout body. V důkazu nemusíte psát, proč vás daná věc napadla. Ukázkou může být příklad 13, zde nenapíšete, přišlo mi, že trojúhelníky ADC a CDB jsou si podobné, tak jsem to zkusil dokázat, ale napíšete, trojúhelníky ADC

a CDB mají stejně velké vnitřní úhly, tudíž jsou podobné. Může se stát, že váš důkaz bude ve výsledku vypadat o dost jinak, než jak jste na něj přišli. Pravděpodobně zjistíte, že třeba nějaká část důkazu není potřeba, nebo, že jde zkrátit/změnit či třeba sepíšete části důkazu v jiném pořadí, než jak jste na ně přišli, protože takto bude důkaz hezčí, čitelnější, pochopitelnější a kratší.

Je dobré zakončit důkaz konstatováním, že jsme to tedy dokázali. Například důkaz v úloze 12 zakončíme větou, tedy tvrzení, že velikost úhlu AXC je $\alpha + \gamma$ je skutečně pravdivé. V matematice je ještě zvykem, že když dokončíme důkaz, dáme na bok malý čtvereček, jako můžete vidět zde. $\square$

BRKOS Team