BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník
2023/2024

Pomocný text ke 5. sérii

Konvexní kombinace

autor: *David Unge*

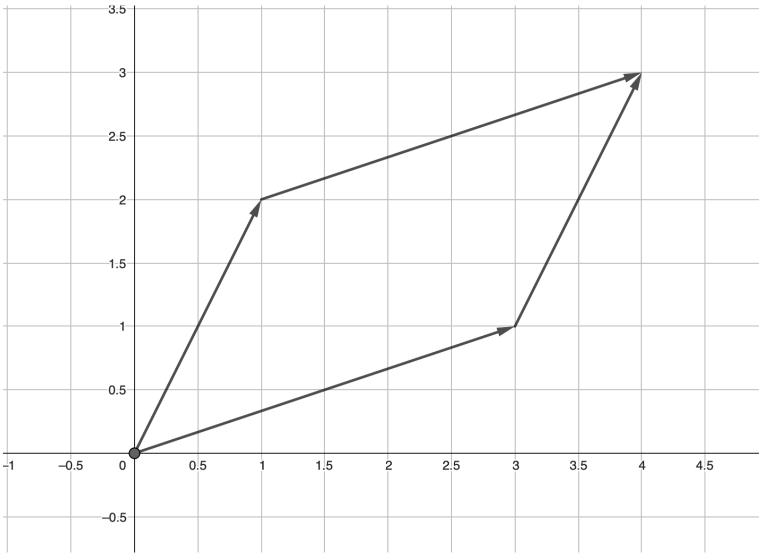
V poslední sérii letošního ročníku Brkosu se zaměříme na pojem konvexní kombinace bodů v rovině. Nebojte, nejde o nic těžkého - je to jen převlečené počítání s vektory.

1 Body a vektory

V této sérii se budeme bavit o bodech a vektorech v rovině. Je potřeba znát a chápat rozdíl v těchto dvou pojmech, bohužel ale k úplnému pochopení potřebujeme poměrně hodně teorie. Pokusím se je proto vysvětlit spíše intuitivně. Pojem bodů roviny značí naprosto běžné body, se kterými jste zvyklí pracovat. Vektory jsou pak v určitém smyslu "rozdíly"těchto bodů, je užitečné si je ale představovat standardně jako šipky. Máme čtyři hlavní operace, které s body a vektory můžeme provádět. První je rozdíl dvou bodů, což je operace, která vezme dva body a jejím výsledkem je vektor. Máme-li body A, B v rovině, pak rozdílem $B - A$ myslíme vektor s počátkem v bodě A vedoucí do bodu B. Druhá operace je součet bodu a vektoru, která bodu a vektoru přiřadí bod. Máme-li bod A a vektor v, pak výsledkem součtu $A + v$ je bod, který získáme, když vektor v umístíme do bodu A. Třetí operace je sčítání vektorů, jejíž výsledkem je vektor. **Pozor**! Sčítat můžeme pouze ty vektory, které jsou umístěny do stejného bodu. Sčítat vektory vycházející z jiných bodů nemá smysl. Čtvrtou operací je pak násobení vektoru číslem, jejíž výsledkem je opět vektor.
Pojďme se podívat na to, jak se tyto pojmy používají v rovině, ve které máme zavedenou kartézskou souřadnou soustavu. Každý bod této roviny má jednoznačně přiřazené souřadnice a zapisujeme ho pomocí hranatých závorek jako $[a_1, a_2]$. V takovéto rovině vnímáme bod o souřadnicích $[0, 0]$ jako význačný a říkáme mu počátek. Bod v této rovině o souřadnicích $[a_1, a_2]$ pak můžeme vnímat zároveň jako vektor vedoucí z počátku do tohoto bodu, neboli jako rozdíl $[a_1, a_2] - [0, 0]$. Takovýto vektor značíme pomocí oblých závorek jako (a_1, a_2). Zároveň můžeme každý vektor vnímat jako bod za pomoci rovnosti $[a_1, a_2] = [0, 0] + (a_1, a_2)$. Vidíme tu jakousi korespondenci mezi body a vektory. Navíc, pokud budeme mít v rovině zavedenou souřadnou soustavu a budeme se bavit o vektorech, budeme předpokládat, že všechny tyto vektory vedou z počátku. Potom víme, že je můžeme mezi sebou sčítat a násobit číslem. Jak to funguje přesně je popsáno v následující sekci.

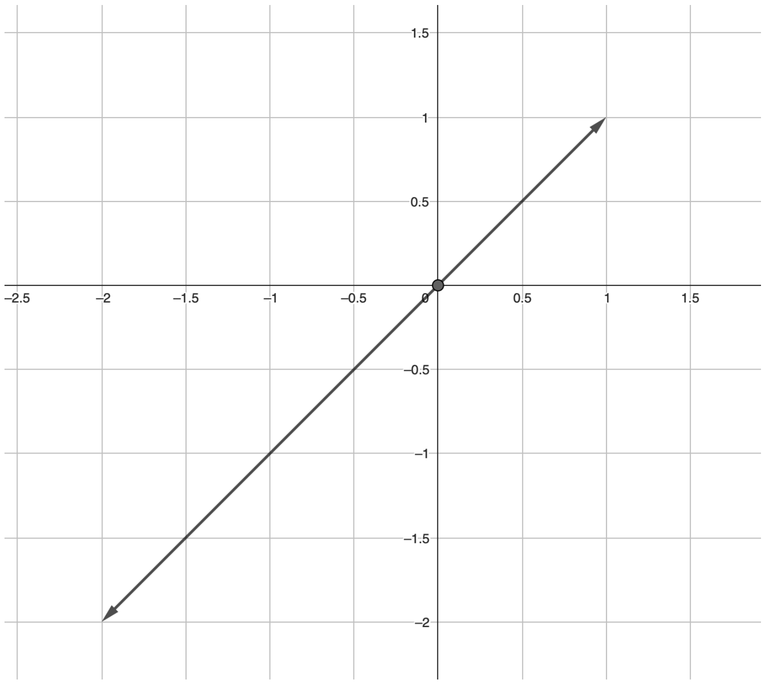
2 Lineární kombinace

Nejprve si připomeňme, jak se v rovině sčítají vektory. Jistě jste se všichni setkali s geometrickou intuicí sčítání vektorů - takzvaným doplněním na rovnoběžník. Mámli dva vektory, za jejich součet označím diagonálu rovnoběžníku, který mi tyto vektory určují.



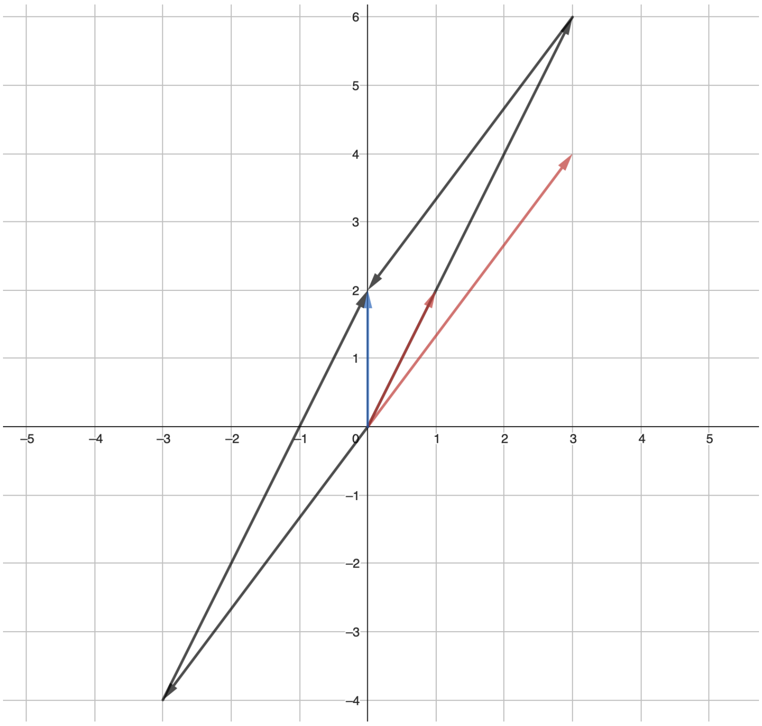
Obr. 1: Sčítání vektorů doplněním na rovnoběžník. Výsledkem je vektor $(4, 3)$.

Nyní bychom tento proces chtěli popsat matematicky. Víme, že vektory v rovině (a_1, a_2) si po zavedení kartézské souřadné soustavy můžeme představit jako šipky vedoucí z počátku o souřadnicích $[0, 0]$ do nějakého obecného bodu $[a_1, a_2]$. Tím, že všechny vektory vedou z počátku, máme jistotu, že je můžeme sčítat. Užitím tohoto zápisu jde sčítání popsat jednoduše - pokud mám dva obecné vektory (a_1, a_2) a (b_1, b_2), potom je sečtu po složkách. Výsledkem bude tedy vektor $(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ opět vedoucí z počátku. Zároveň jistě všichni víte, jak běžně násobíme vektory číslem. Máme-li nějaké reálné číslo r, kterým chceme vynásobit vektor (a_1, a_2), vynásobíme ho po složkách. Výsledkem tedy bude vektor (ra_1, ra_2).



Obr. 2: Násobení vektoru $(1, 1)$ číslem -2.

Posledním pojmem, který v této sekci chci zavést, je tzv. lineární kombinace. Nejde o nic jiného, než kombinaci sčítání a násobení vektorů číslem. Například, pokud máme vektory $(1,2)$ a $(3,4)$ společně s čísly 3 a (-1), výsledkem lineární kombinace $3\cdot(1,2)+(-1)\cdot(3,4)$ je vektor $(0,2)$. Čísla $3,-1$ nazveme koeficienty lineární kombinace.



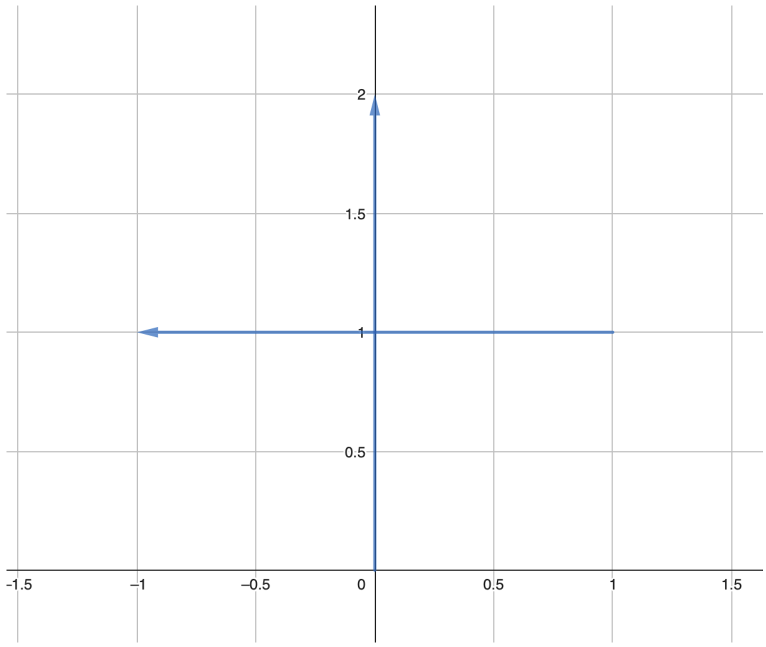
Obr. 3: Lineární kombinace. Červeně vyznačené jsou původní vektory, černé jsou jejich příslušné násobky a doplnění na rovnoběžník a výsledný vektor je modrý.

Našim cílem je získat něco jako lineární kombinaci bodů. Problém je, že body neumíme sčítat ani násobit vektorem. Toto můžeme vyřešit tak, že si v rovině zavedeme souřadnou soustavu. Poté si každý bod můžeme představit jako vektor z počátku do tohoto bodu a provést lineární kombinaci bodů jako lineární kombinaci vektorů. Například pokud bychom měli dva body v rovině se souřadnou soustavou, a tyto body měly souřadnice $[1,2]$ a $[3,4]$, mohli bychom si představit jejich lineární kombinaci $3\cdot[1,2]+(-1)\cdot[3,4]$ jako lineární kombinaci příslušných vektorů vedoucích z počátku, kterou jsme popsali v předchozím příkladu. Výsledkem by pak byl bod $[0,2]$ jakožto součet $[0,0]+(0,2)$. Mluvíme-li tedy o lineární kombinaci bodů, skrývá se za ní lineární kombinace vektorů vedoucích z počátku a jejím výsledkem bude bod jakožto součet počátku a výsledného vektoru.

3 Afinní kombinace

Když jsme si připomněli sčítání vektorů, je na čase se posunout blíže ke konvexním kombinacím. Běžně jsme všichni zvyklí pracovat v rovině společně s kartézskou souřadnou soustavou, tedy v rovině s daným počátkem. My si zavedeme rovinu bez počátku. Tato rovina se nazývá afinní. Za pojmem afinní roviny stojí myšlenka, že v nekonečné rovině je možné vzít za počátek bez rozdílu úplně libovolný bod. Vskutku, běžný počátek nemá žádnou speciální kvalitu, která by ho vyzdvihla nad ostatní body. Stejně tak jako v jedné souřadné soustavě hraje bod [0,0] roli počátku, můžu si ve stejné rovině definovat

novou souřadnou soustavu s počátkem v bodě $[1, 1]$. Tyto soustavy budou shodné až na nějaké posunutí a otočení o určitý úhel (neboli afinní zobrazení). Pojďme se ale zaměřit na to, co se stane s lineárními kombinacemi po změně souřadných soustav.
Vraťme se k příkladu z minulé sekce, kde jsme uvažovali lineární kombinaci $3 \cdot (1, 2) + (-1) \cdot (3, 4)$, jejíž výsledkem byl vektor $(0, 2)$. Tuto kombinaci samozřejmě provádíme v rovině, ve které máme zavedenou souřadnou soustavu, a můžeme se na ni proto dívat jako na kombinaci bodů, jejímž výsledkem bude opět bod se souřadnicemi $[0, 2]$. Zkusme nyní zavést novou souřadnou soustavu a zjistit, co se stane s touto lineární kombinací a zejména s výsledným bodem. Uvažme souřadnou soustavu, jejíž střed bude v bodě $[1, 1]$ a souřadné osy budou rovnoběžné s předchozími. Jedná se tedy pouze o posunutí, které bod o souřadnicích $[a_1, a_2]$ zobrazí na bod $[a_1 + 1, a_2 + 1]$. Poté body, které měly původní souřadnice $[1, 2]$ a $[3, 4]$, budou mít nové souřadnice $[0, 1]$ a $[2, 3]$. Jejich lineární kombinace se stejnými koeficienty 3 a -1 bude nyní vypadat jako $3 \cdot [0, 1] + (-1) \cdot [2, 3] = [-2, 0]$. Tento bod má původní souřadnice $[-1, 1]$. Liší se tedy od výsledku lineární kombinace v původních souřadnicích, což byl bod $[0, 2]$!



Obr. 4: Body $[0, 2]$ a $[-1, 1]$ jakožto výsledky stejné lineární kombinace po změně souřadných soustav.

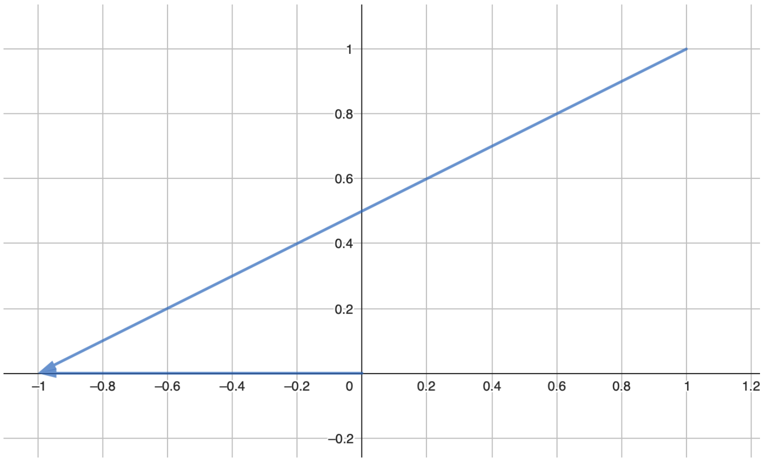
Tento rozdíl nám není příliš příjemný. Chtěli bychom pracovat v afinní rovině, tedy v rovině bez jasně daného počátku, a chtěli bychom uvažovat lineární kombinace bodů. Vidíme ale, že pokud si zvolíme souřadnou soustavu dvěma různými způsoby, dají nám ty stejné lineární kombinace různé výsledky. Našim cílem je tedy zavést takový pojem kombinace, který by **nezávisel** na volbě souřadné soustavy, tedy výsledek lineární kombinace pevně zvolených bodů s určitými koeficienty by byl stejný pro libovolně zvolenou souřadnou soustavu. Tím je přesně pojem afinní kombinace. Ještě je dobré si uvědomit, že vektory vedoucí z počátku se sčítají pomocí stejného pravidla (doplnění na rovnoběžník), ať si souřadné osy zvolíme v jakémkoliv směru. Mluvíme-li tedy o volbě souřadné soustavy, zásadní roli hraje pouze volba počátku. Volba souřadných os nebude mít na sčítání vektorů vliv.

BRKOS Team

Věta 1: Máme-li afinní rovinu bez zvoleného počátku, konečně mnoho bodů $\{A_i : 1 \leq i \leq n\}$ v této rovině a čísla $r_i \in \mathbb{R}$, pak lineární kombinace $r_1A_1 + r_2A_2 + \ldots + r_nA_n = \sum_{i=0}^{n} r_iA_i$ nezávisí na volbě souřadné soustavy právě tehdy, když součet jejích koeficientů je roven jedné, tedy $r_1 + r_2 + \ldots + r_n = \sum_{i=1}^{n} r_i = 1$. Lineární kombinaci s vlastností $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$ nazýváme afinní kombinací.

Důkaz: Tento důkaz je spíše ilustrativní a není třeba k úspěšnému řešení série. Zvolíme-li si dva různé počátky v rovině P a Q, chceme, aby výsledky lineárních kombinací vzhledem k těmto počátkům byly stejné, tedy aby $P+\sum_{i=1}^{n} r_i(\overrightarrow{PA_i}) = Q+\sum_{i=1}^{n} r_i(\overrightarrow{QA_i})$, pak platí série ekvivalencí $P + \sum_{i=1}^{n} r_i(\overrightarrow{PA_i}) = Q + \sum_{i=1}^{n} r_i(\overrightarrow{QA_i}) \iff \overrightarrow{QP} + \sum_{i=1}^{n} r_i(\overrightarrow{PA_i} - \overrightarrow{QA_i}) = 0 \iff -\overrightarrow{PQ} + \sum_{i=1}^{n} r_i(\overrightarrow{PQ}) = 0 \iff \overrightarrow{PQ} \cdot (-1 + \sum_{i=1}^{n} r_i) = 0 \iff \sum_{i=1}^{n} r_i = 1.$

Můžete si vyzkoušet, že tato definice afinní kombinace doopravdy funguje. Kdybychom si opět vzali již několikrát zmíněnou kombinaci bodů $[1, 2]$ a $[3, 4]$, nyní ale s koeficienty 2 a -1, zjistili bychom, že i po změně souřadnic vychází ten stejný bod v rovině.



Obr. 5: Výsledky afinní kombinace po změně souřadných soustav jsou stejné.

4 Konvexní kombinace

Pojďme se podívat na to, čeho jsme vlastně dosáhli. Máme obecnou afinní rovinu bez souřadnic a nějaké body v této rovině. Chtěli bychom tyto body sčítat a násobit - ale to víme, že pro body nedává smysl. Zvolíme si v této rovině tedy nějaký počátek a souřadnou soustavu, a z bodů se nám stanou vektory vedoucí z počátku této soustavy. Ty už sčítat a násobit čísly umíme - děláme takzvané lineární kombinace. Potíž je v tom, že výsledek lineární kombinace, pokud si ho představíme jako nějaký bod v rovině, může záviset na dané souřadné soustavě. Proto jsme zavedli pojem afinní kombinace, kde součet koeficientů kombinace musí být jedna. Poté víme, že výsledek kombinace na zvolené soustavě nezávisí. Můžeme se tedy bavit o afinních kombinacích bodů v rovině, kde žádnou souřadnou soustavu nemáme. Pokud budeme chtít zjistit výsledek nějaké takové afinní kombinace, jednoduše si zvolíme souřadnou soustavu zcela libovolně a výsledek dopočítáme.
Nyní už se konečně můžeme dostat k hlavnímu pojmu této série: konvexní kombinace.

Jedná se o afinní kombinaci bodů v rovině s přidanou podmínkou, že všechny koeficienty této kombinace musí být nezáporné. Jde tedy o kombinaci $\sum_{i=1}^{n} r_i A_i$, kde $\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$ a zároveň $r_i \geq 0$ pro každé $1 \leq i \leq n$. Jaký je geometrický význam konvexních kombinací? Pokud máme dva body v rovině A, B, pak výsledkem jejich libovolné konvexní kombinace bude bod ležící na úsečce AB. Pokud máme body A, B, C, které neleží na přímce, poté bude výsledkem jejich konvexní kombinace bod ležící uvnitř trojúhelníka ABC. Už i z názvu je tedy vidět, že konvexní kombinace budou mít co do činění s pojmem konvexních útvarů v rovině. Pojďme si ho připomenout.

Definice: O množině bodů v rovině řekneme, že je konvexní, pokud s každými svými dvěma body obsahuje i úsečku jimi určenou.

Věta 2: Průnik libovolně mnoha konvexních útvarů je konvexní.

Důkaz: Nechť body A, B leží v průniku konvexních útvarů. Poté musely ležet v každém z pronikaných útvarů, a protože všechny tyto jsou konvexní, pak všechny obsahují i úsečku AB. Proto tato úsečka musí také ležet v jejich průniku.

Definice: Mějme množinu bodů M v rovině. Konvexní obal množiny M je nejmenší konvexní útvar, který M obsahuje, a definujeme ho jako průnik všech konvexních útvarů, které obsahují množinu M. Konvexní obal množiny M značíme $conv(M)$.

Věta 3: Mějme množinu konečně mnoha bodů v rovině, označme ji $M = \{A_i : 1 \leq i \leq n\}$. Poté její konvexní obal splývá s množinou všech konvexních kombinací bodů A_i, tedy platí rovnost $conv(M) = \{\sum_{i=1}^{n} r_i A_i : \sum_{i=1}^{n} r_i = 1, r_i \geq 0\}$.

Větu 3 ponecháme bez důkazu, poskytuje nám ale velice užitečný nástroj, jak popsat konvexní obal konečně mnoha bodů v rovině. Stačí uvážit všechny jejich konvexní kombinace!

5 Pomocná tvrzení

V této sekci najdete tvrzení, příklady a důkazové postupy, které Vám pomohou při řešení série. Na libovolné tvrzení z této sekce se můžete ve svých řešeních odkázat.

Věta 4: Mějme dva různé body v rovině A, B. Množina afinních kombinací $\{kA + (1-k)B : k \in \mathbb{R}\}$ tvoří přímku určenou body A, B.

Důkaz: Stačí ukázat, že rozdíl libovolných dvou bodů z této množiny je násobek vektoru $\overrightarrow{AB}$. Mějme $X = kA + (1-k)B$ a $Y = lA + (1-l)B$ pro nějaká $k, l \in \mathbb{R}$. Zvolme libovolně počátek P a počítejme: $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PY} - \overrightarrow{PX} = l\,\overrightarrow{PA} + (1-l)\,\overrightarrow{PB} - (k\,\overrightarrow{PA} - (1-k)\,\overrightarrow{PB}) = (l-k)\,\overrightarrow{PA} - (l-k)\,\overrightarrow{PB} = (l-k)\,\overrightarrow{BA} = (k-l)\,\overrightarrow{AB}$.

Věta 5: Máme-li dva různé body v rovině A a B, pak bod X ležící na úsečce AB takový, že platí $\frac{|AX|}{|XB|} = \frac{p}{q}$, je konvexní kombinací $X = \frac{q}{p+q} \cdot A + \frac{p}{p+q} \cdot B$. (Zároveň si všimněte, že čím blíž je bod X k bodu B, tím větší koeficient máme u bodu B.)

Důkaz: Zvolme si počátek P v rovině zcela libovolně. Víme, že platí $X = kA + (1-k)B$. Pak $\overrightarrow{PX} = k\overrightarrow{PA} + (1-k)\overrightarrow{PB} = k\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - k\overrightarrow{PB} = k(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}) + \overrightarrow{PB} = k\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{PB}$. Z toho plyne $\overrightarrow{PX} - \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BX} = k\overrightarrow{BA}$. Z podmínek na podíl vzdáleností pak platí, že $k = \frac{q}{p+q}$. Nyní už je vidět, že $X = \frac{q}{p+q}A + \frac{p}{p+q}B$.

Příklad 1: Dokažte, že úhlopříčky čtyřúhelníka se půlí právě tehdy, když se jedná o rovnoběžník.

Řešení: Z předchozí věty víme, že střed úsečky XY se pomocí konvexní kombinace vyjádří jako $S = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}Y$. Poté se dá zadání přeformulovat na problém, kdy máme 4 body v rovině A, B, C, D a požadujeme, aby střed úsečky AC splynul se středem úsečky BD, tedy $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D$. Zvolíme-li si libovolný počátek P, pak získáváme vektorovou rovnost $\frac{1}{2}\overrightarrow{PA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PD}$, z čehož plyne $\frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PD} - \overrightarrow{PC})$, neboli $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$. Zároveň musí platit $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, a tedy i $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Pak vidíme, že vektory určující protější strany musí být stejné, a tedy zejména rovnoběžné.

Věta 6: *(Carathéodory)* Mějme množinu M konečně mnoha bodů v rovině a nechť bod x leží v konvexním obalu $conv(M)$ této množiny. Potom existuje trojice bodů $A_1, A_2, A_3 \in M$ taková, že $x \in conv(A_1, A_2, A_3)$.

Věta 7: *(Skalární součin)* Nechť a_1, a_2, b_1, b_2 jsou reálná čísla a platí $a_1^2 + a_2^2 \leq 1, b_1^2 + b_2^2 \leq 1$. Pak $a_1b_1 + a_2b_2 \leq 1$. Navíc, pokud $a_1^2 + a_2^2 \leq 1, b_1^2 + b_2^2 \leq 1$ a platí $a_1b_1 + a_2b_2 = 1$, pak $a_1 = b_1, a_2 = b_2$.

Na závěr si dovolím pár poznámek a rad k úlohám.

- Máme-li dva nějaké body X a Y vyjádřeny jako afinní kombinace jiných bodů a chceme nalézt vektor $\overrightarrow{XY}$, formálně správným řešením není odečíst obě afinní kombinace od sebe. Je potřeba si zvolit počátek P a poté pracovat s vektory $\overrightarrow{PX}, \overrightarrow{PY}$, kdy $\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{PY} - \overrightarrow{PX}$. Inspirujte se postupy v předchozích důkazech.

- Rovnoběžnost se dá vyjádřit pomocí násobku vektorů. Chceme-li ukázat, že úsečky AB a CD jsou rovnoběžné, stačí, aby vektory $\overrightarrow{AB}$ a $\overrightarrow{CD}$ byly násobky jeden druhého.

- Úplné řešení úlohy 3 vyžaduje rigorózní důkaz. Stačí úlohu dokázat pro kruh o poloměru 1. Zafixujte si souřadnou soustavu v rovině a uvažujte kruh o poloměru 1 se středem v počátku této soustavy. Předpokládejte pro spor, že tento kruh lze zapsat jako konvexní obal konečně mnoha bodů. Vyberte si libovolný bod na hraniční kružnici. Použijte Carathéodoryho větu, větu o skalárním součinu a dojděte ke sporu.

BRKOS Team