BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník
2023/2024

Pomocný text ke 4. sérii

Teleskopické součty a Geometrické řady

autor: *Adéla Heroudková*

1 Nekonečné řady

V této Brkosí sérii najdete příklady na teleskopické součty a hlavně na geometrické řady. Jsou to konkrétní typy příkladů, které by se daly schovat pod název nekonečné řady. Pojďme si tedy nejprve představit, co to taková nekonečná řada je.

Obvykle bývá jednoduché sečíst dvě čísla (alespoň s kalkulačkou). Těžší problém může být sečíst n čísel, například vyjádřit hodnotu

$$s_n = 1 + 2 + \cdots + n.$$

Traduje se, že první, kdo určil součet této řady čísel, byl slavný matematik Carl Friedrich Gauss, když se ho paní učitelka na základní škole snažila zabavit v hodině matematiky. Někteří z vás možná znají výsledný vzorec:

$$s_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Další takový zajímavý součet může být

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}.$$

V tomto případě určíme součet tak, že od sebe odečteme řady s_n a $\frac{1}{2}s_n$. Nedá moc práce zjistit, že výsledek bude roven $1 - \frac{1}{2^{n+1}}$, a tedy po úpravě dostaneme

$$s_n = 2 - \frac{1}{2^n}.$$

V tomto případě se děje něco zajímavého: jak se n zvětšuje, hodnota součtu s_n se neustále blíží ke dvojce (zlomek $\frac{1}{2^n}$ se velmi rychle zmenšuje), ovšem nikdy dvojky nedosáhne. Nicméně, pro jakékoli číslo menší než 2, např. $1{,}9999999999$, najdeme vhodné n takové, že $2 > s_n > 1{,}999999$ (v tomhle případě můžeme vzít $n = 20$, ověřte si sami!). Tzn. v tomto případě dává smysl uvážit nekonečný součet

$$s_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots$$

a položit ho roven dvěma.

Formálně můžeme tuto situaci popsat pomocí následujících definic:

Definice: Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel, potom **nekonečnou řadou** rozumíme výraz

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 \ldots$$

Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2, \dots,\ s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$

nazýváme **posloupnost částečných součtů** dané nekonečné řady.

Máme-li danou nekonečnou řadu, důležitou otázkou je, zda celkový součet je nějaké reálné číslo nebo zda je součet roven $\pm\infty$. Viděli jsme, že v případě posloupnosti $\{\frac{1}{2^{n-1}}\}_{n=1}^{\infty}$ můžeme součet řady položit roven dvěma, v případě posloupnosti $\{n\}_{n=1}^{\infty}$ zjevně hodnoty s_n donekonečna rostou, tedy řekneme, že součet je roven ∞. Pokud je součtem reálné číslo říkáme, že řada konverguje, pokud je součet roven $\pm\infty$, říkáme, že řada diverguje. Zde si můžete přečíst formální definici:

Definice: Řekneme, že řada **konverguje** a její součet je roven s, jestliže limita posloupnosti částečných součtů existuje a je konečná, neboli $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in \mathbb{R}$. Potom píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Pokud se posloupnost částečných součtů blíží k $\pm\infty$, řekneme, že řada **diverguje**. Může se stát, že posloupnost součtů s_n nebude mít žádnou limitu, potom říkáme, že řada **osciluje**.

To, že „limita částečných součtů existuje a je konečná", si můžeme představit jako, že se poslounost částečných součtů někonečně blíží nějakému reálnému číslu.

Jako příklad oscilující řady si můžeme vzít řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots.$$

V tomto případě je posloupnost částečných součtů tvaru $1, 0, 1, 0, 1, \dots$ není tedy jasné, jestli by celkový součet nekonečné řady měl být 0 nebo 1.

Rozhodnout k čemu nekonečná řada konverguje je obecně velice náročné. Například u řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ to dodnes nevíme. Občas není ani jednuché rozhodnout, zda řada vůbec konverguje, příkladem může být řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \sin^2 n}$.

Nyní si představíme dva způsoby, jak problém konvergence vyřešit u některých typů řad.

2 Teleskopické součty

U nekonečných řad, kde se nám objevují prvky se znaménky plus a mínus, se můžeme podívat, zda se nám nepodaří zjednodušit n-té částečné součty tím, že se nám ve vyjádření členy poodečítají. Když zjednodušíme posloupnost částečných součtů, je jednodušší určit k čemu daná řada konverguje (či zda diverguje).

Příklad 1: Určete součet řady:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

Řešení: Její N-tý částečný součet se rovná

$$s_N = \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{N+1}\right)\right].$$

Když tento součet přezávorkujeme, uvidíme, jak se nám spousta prvků krásně poodečítá:

$$s_N = \left[1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{N} + \frac{1}{N}\right) - \frac{1}{N+1}\right] = 1 - \frac{1}{N+1}.$$

S každým dalším částečným součtem tedy budeme odečítat od 1 menší a menší číslo. A limita této posloupnosti, a tedy i součet řady, vyjde 1. (Toto není korektní důkaz, ale spíše idea. Na korektní důkaz, že je to skutečně 1, bychom potřebovali vysvětlit teorii limit, na což zde bohužel není prostor :(Nicméně takováto idea nám ve vašich řešeních bude stačit :))

Někdy nedostaneme řadu takhle pěkně rozepsanou a sami si ji musíme upravit, aby se nám následně členy poodečítaly. Například předchozí sumu bychom mohli dostat ve tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Vyzkoušet si spočítat takovou teleskopickou sumu můžete v prvním příkladu této série.

3 Geometrické řady

Nekonečnou posloupnost nazýváme geometrickou, pokud je každý člen definován rekurentně vztahem

$$a_{n+1} = a_n q,$$

kde q je takzvaný kvocient dané posloupnosti. Můžeme tedy n-tý člen posloupnosti psát jako

$$a_n = a_1 q^{n-1}.$$

Nekonečná geometrická řada s kvocientem q bude tedy vypadat

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}.$$

Nyní se podívejme na součet prvních n členů této řady. Na zjednodušení výrazu využijme vztahu $q^n - 1 = (q-1)(q^{n-1} + q^{n-2} + \cdots + 1)$. Pokud $q \neq 1$ tedy platí:

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 q + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Pro $q = 1$ je $s_n = n a_1$. Příklad geometrické řady jsme viděli v úvodu pro $a_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

Jak tedy dopadne součet nekonečné geometrické řady? Pokud je $q \geq 1$, není težké si rozmyslet, že posloupnost půjde do nekonečna, protože prvek q^n roste do nekonečna, a tedy řada bude divergovat. Pokud bude $q \leq -1$ poroste posloupnost v absolutní hodnotě do nekonečna, ale protože se budou střídat kladné a záporné hodnoty, znamená to, že řada bude oscilovat. Pokud ale bude $|q| < 1$, bude se prvek q^n neustále zmenšovat a čím dál víc blížit nule. Nakonec tedy dostaneme, že limita posloupnosti částečných součtů, a tedy i součet řady, je $\frac{a_1}{1-q}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} & \text{pro} |q| < 1 \\ \pm\infty & \text{pro } q \geq 1 \\ \text{osciluje} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

Příklad 2: Určete zda řada konverguje či diverguje, případně určete její součet:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{4}{3} + \frac{8}{9} + \frac{16}{27} + \cdots .$$

Řešení: Jedná se o geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{2}{3}$ a počátečním členem $a_1 = \frac{4}{3}$. Mimochodem, kvocient můžeme jednoduše spočítat tak, že vydělíme dva po sboě jdoucí členy geometrické řady, např.

$$q = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}.$$

Kvocient je v absolutní hodnotě menší než 1, takže součet se bude rovnat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n} = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = 4.$$

V sérii jsou samozřejmě těžší příklady než tento, nicméně na jejich vyřešení z teorie nekonečných řad nepotřebujete vědět nic víc, než tento krátký úvod :)

4 Bonus: Využití nekonečných řad

Následující text nebudete k řešení úloh potřebovat, nicméně určitě si jej přečtěte, chcete-li zjistit, k čemu můžeme nekonečné řady použít v praxi.

Zamysleli jste se někdy nad tím, co se stane, když do kalkulačky zadáte pokyn „sin(48.5)“? Samozřejmě se stane to, že na kalkulačce se objeví výsledek. Ale jak k němu ten stroj dojde? Odpovědí jsou překvapivě nekonečné řady. Kalkulačka totiž ve skutečnosti neumí nic víc než sčítat, odčítat, násobit, dělit, mocnit – ale je v tom zatraceně dobrá. A faktem je, že každá rozumná funkce – jako sinus, kosinus, odmoncina, exponenciála, logaritmus atd. – se dá vyjádřit hezkým způsobem pomocí jisté nekonečné řady, tzv. Taylorovy řady. Například platí následující:

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots .$$

Kalkulačka tedy udělá pouze to, že vezme nějaký částečný součet řady napravo – dost velký, aby se na třeba 6 desetinných míst shodoval s opravdovou hodnotou $\sin x$ – a výsledek vám naservíruje.

BRKOS Team

Příklad 3: Zkusíme-li následující metodou určit $\sin(\pi)$. Můžeme si spočítat třeba v programu wolframalpha, že součet prvních sedmi členů je přibližně roven $0{,}00002$, tedy se opravdu postupně blížíme k nule.

Mezi další Taylorovy řady patří např. slavná a velmi užitečná řada pro exponenciálu:

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots .$$

Na tomto vidíme další, podobné, využití nekonečných řad: aproximace nějakých konstant. Např. následující řada aproximující π byla objevena už okolo roku 1400:

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \cdots .$$

Bohužel, ač velmi krásná, tato řada konverguje k π extrémně pomalu (je potřeba sečíst 4000 členů, aby byl výsledek lepší než Archimédův odhad). Nicméně existují i mnohem rychlejší aproximace, jak se můžete dočíst na wikipedii.

BRKOS Team