BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník
2023/2024

Pomocný text ke 3. sérii

# Teorie grafů

autor: *Tonda*

Od pradávna si lidé kladli spoustu záludných otázek, například, jestli existuje posmrtný život, zda je život na jiné planetě než na Zemi, či jestli bude někdy možné cestovat časem. Na tyto otázky vám bohužel neodpovím, ale nezoufejte, aspoň se v tomto textu dozvíte něco málo o teorii grafů.

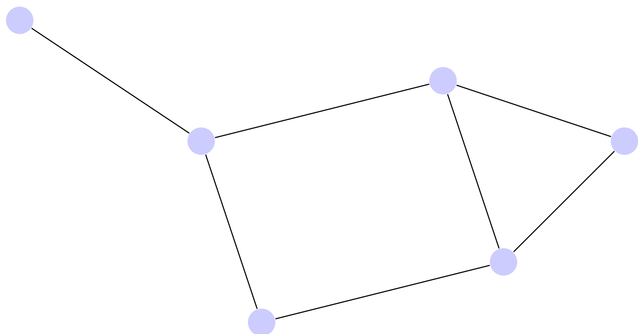
Asi každý z vás někdy slyšel slovo graf. Ať už jste viděli koláčové či sloupcové grafy, nebo grafy funkcí, či snad dokonce grafy, o kterých se v této sérii budeme bavit. Než začneme, rád bych tedy ještě upřesnil, že koláčové a ostatní grafy pro tentokrát hodíme stranou a přejděme tedy k tomu, jakými že grafy se budeme zabývat :).

## Graf

V první části si definujeme pojem grafu, ukážeme si různé typy grafů, pár základních vlastností a krás, dále budeme zkoumat všemožné koncepty, které se na grafech zkoumat dají. Přejděme tedy rovnou šupem k definici.

**Definice.** Nechť $V$ je libovolná neprázdná konečná množina, $E$ je libovolná podmnožina dvouprvkových podmnožin množiny $V$. Dvojici $(V, E)$ nazýváme **graf**. Prvkům množiny $V$ říkáme **vrcholy**, prvkům $E$ **hrany**.

Zní to podivně, že? Nezoufejte, nic na tom není. Zkrátka tahle definice říká třeba to, že vrcholy jsou nějaké body v rovině a hrany jen čáry mezi nimi.



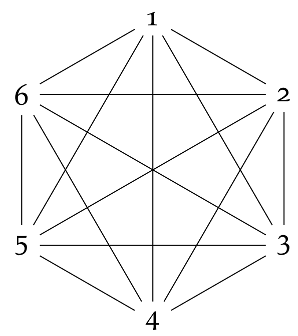
Třeba takhle může graf vypadat. Někdy je takový graf označován jako neorientovaný graf, protože dva různé vrcholy jsou buď propojeny, nebo ne, není možné aby vrchol $a$ byl propojen s vrcholem $b$, zatímco vrchol $b$ nebyl propojen s vrcholem $a$. I takové grafy se dají zavést, jednoduše by v definici muselo $E$ být libovolná podmnožina kartézského součinu $V \times V$, ale orientovaným grafům se věnovat nebudeme.

Mezi dvěma vrcholy nemůže vést více než jedna hrana! Zároveň nemůže vést z vrcholu hrana někam do neznáma a nemůže být vrchol propojen hranou sám se sebou. Tohle vše sice plyne z definice, ale hodí se to zdůraznit.

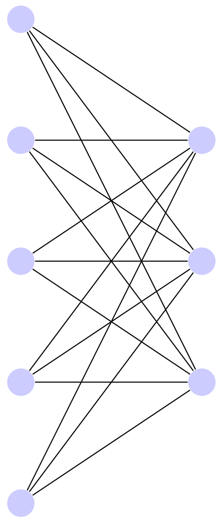
Musím přiznat, že většina vysokoškolské teoretické matematiky v běžném životě moc využití nepozná. Co je ale krásné je to, že existují odvětví, která mají nejen spoustu teoretických myšlenek, ale významně přesahují i do reálného života. A teorie grafů mezi takové rozhodně patří. Představte si silnice mezi městy, ach, hned máte vrcholy a hrany! Z teoretických poznatků teorie grafů plyne například, jak dopravu zefektivnit. Představte si stožáry a mezi nimi natažené dráty. Co vidíte? ANO! GRAF! Zkrátka grafy jsou všude kolem vás, i tam kde byste je nečekali, a šikovní matematici pomocí teorie grafů usnadňují spoustu praktických problémů ze života každého z nás. Teď se ale vrátíme zpět na zem, a začneme hezky od začátku.

Podívejme se nyní na pár základních typů grafů, které jsou často používány.

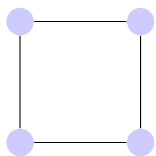
**Úplný graf**: Úplný graf je takový graf, kde $E$ je celá množina všech dvouprvkových podmnožin. V praxi to znamená, že každý vrchol je spojen se všemi ostatními. Tento graf značíme $K_n$, kde $n$ je počet jeho vrcholů. Zde si prohlédněte úplný graf $K_6$.




**Bipartitní graf**: Bipartitní graf je takový graf, pro který množina $V$ je složena ze dvou disjunktních neprázdných množin a každá hrana vede mezi vrcholem z jedné množiny do vrcholu z druhé množiny. Speciálním případem je úplný bipartitní graf, kde každý vrchol z jedné množiny je spojen s každým vrcholem z množiny druhé. Úplný bipartitní graf se značí $K_{m,n}$, kde $m$, $n$ udávají počty vrcholů ve dvou zmiňovaných množinách. Pro lepší pochopení jdu vytvořit obrázek $K_{5,3}$:).



**Cyklus**: Mohl bych zde popsat definici cyklu, ale asi nejjednoduší bude ukázat obrázek, ze kterého každý pochopí, co je cyklus. Uvedu jen, že se značí $C_n$, kde $n$ je počet vrcholů (ale i hran) tohoto cyklu. Někdy se také cyklus nazývá kružnice. Na obrázku níže vidíte $C_4$



**Cesta**: Cesta $P_n$ je graf na $n$ vrcholech, který vypadá následovně:



Na obrázku je tedy graf $P_4$. Občas bývá matoucí, že se tomuto grafu říká cesta délky 3, protože má 3 hrany. Obecně tedy cesta délky $n$ je $P_{n+1}$.

To by asi mohlo stačit jako začáteční výčet různých grafů. Budeme chtít zkoumat nějaké vlastnosti a krásy. Než však budeme moct začít, potřebujeme ještě pár definic a trochu teorie. Kdo už zná něco málo o teorii grafů, může následující část velice rychle prolétnout a vrhnout se až na zajímavější sekce.

## Kdy jsou dva grafy "stejné?"

Z naší definice grafu je patrné, že množina vrcholů $V$ není nijak výrazněji specifikována, krom toho, že je neprázdná a konečná. Představte si, že si v rovině nakreslíte dva body a spojíte je úsečkou. Poté zvolíte jiné dva body a spojíte je. Dle definice jde o různé grafy, protože se jedná o jinou množinu vrcholů. Čistě jako grafy však mají úplně stejné všechny vlastnosti. Je proto poměrně duležité si umět říct, kdy dva grafy považujeme za stejné a vysvětlit si, že potom vůbec nebude záležet na tom, jak si do roviny zakreslíme vrcholy a hrany a jediná důležitá věc je, abychom je správně propojili.

**Definice.** Nechť $G = (V, E)$ a $F = (V', E')$ jsou dva grafy. Zobrazení $f : G \to F$ se nazývá **homomorfismus grafů**, jestliže každé dva vrcholy, které jsou spojeny hranou v grafu $G$ se zobrazí na vrcholy grafu $F$, které jsou spojeny hranou.

Intuitivně jde o zobrazení, které spojené body nechá spojené.

**Definice.** Nechť $G, F$ jsou grafy. Zobrazení $f : G \to F$, které je bijektivní nazveme **izomorfismus grafů**, jestliže $f$ i $f^{-1}$ je homomorfismus grafů. O grafech řekneme, že jsou izomorfní, pokud mezi nimi existuje izomorfismus.

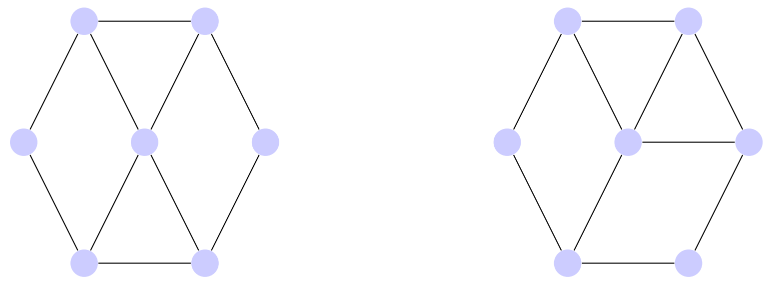
Tato definice není jednoduchá. Řekněme si, co znamená intuitivně. Dva grafy budeme považovat za stejné, (izomorfní), jestliže dokážeme překreslit jeden graf na druhý tak, abychom zachovali strukturu vrcholů a hran, tím způsobem, že v jednom grafu budou spojeny právě ty vrcholy co odpovídají spojeným vrcholům druhého grafu. Představte si tři vrcholy uspořádané do písmene $L$, na kterých máte dvě hrany. Tento graf je izomorfní s grafem $P_3$, jde jen o jiné nakreslení toho samého. Obecně není vůbec jednoduchý problém rozhodnout, zda jsou dva dané grafy izomorfní nebo ne. Dá se často jednoduše říct, že nejsou. Představte si ale dva grafy na třeba 10000 vrcholech. Těžko poznáte, jestli se jedná o jeden a ten samý, akorát jinak nakreslený. Ukážeme si pár jednoduchých příkladů, jak o tomhle rozhodnout.

**Příklad 1.** Představte si na digitálním budíku dva grafy - číslici 0 a číslici 8. Uvažme zobrazení z grafu 0 do grafu 8, které nechá všechny vrcholy na místě. Tohle zobrazení je homomorfismus grafů, protože každé dva vrcholy, které jsou spojeny v grafu 0 jsou spojeny i v grafu 8. Zároveň je to bijekce. Inverzní zobrazení však není homomorfismus grafů, neboť prostřední hrana byla pohlcena ničotou.

**Definice.** **Stupeň** vrcholu $v \in V$ je počet hran, které obsahují tento vrchol.

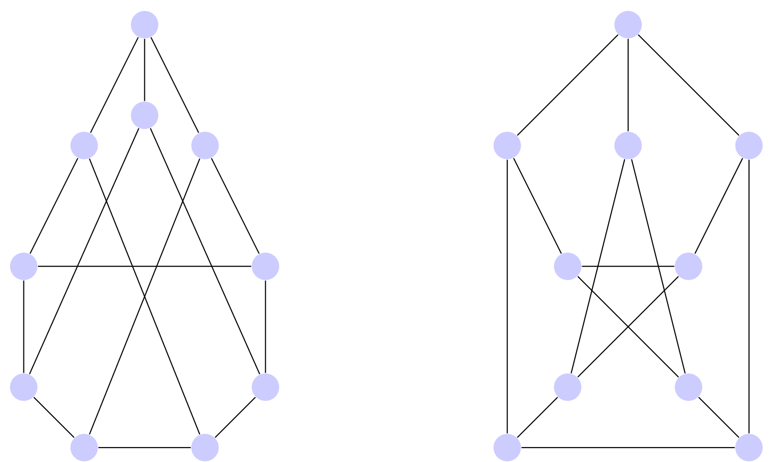
Intuitivně počet čar, které vedou z daného vrcholu. Jako důkaz tvrzení, že dva grafy nejsou izomorfní můžeme použít například úvahy o stupních, napříklda, že v jednom existuje vrchol stupně 42, ve druhém ne. V jednom existuje vrchol stupně 4, který sousedí se třemi vrcholy stupně 2, zatímco ve druhém takový vrchol neexistuje a podobně.

**Příklad 2.** Rozhodněte, zda jsou následující dva grafy izomorfní:



Univerzální postup je asi takový, že žádný není. Nejprve hledáme nějaké vlastnosti grafů a snažíme se najít nějakou odlišnost. Grafy vypadají na první pohled velice jinak, ale to neznamená, že se nejedná jen o překreslení. Když se nám odlišnost nepodaří najít, zkusíme najít konkrétní izomorfismus, tedy který vrchol odpovídá kterému a ověříme, že opravdu vše co je propojeno v jednom grafu, je propojeno i ve druhém a naopak. V tomhle konkrétním případě existují v každém grafu právě dva vrcholy stupně 2. Avšak v levém grafu má nejkratší cesta mezi nimi délku 3, zatímco v pravém grafu existuje cesta délky 2 mezi těmito dvěma vrcholy. Proto nejsou izomorfní. Další argument může být, že v pravém grafu existuje vrchol stupně 3, který sousedí se dvěma vrcholy stupně 2, v levém takový neexistuje. Nebo se dá říct to, že v obou grafech existují právě dva podgrafy izomorfní s $K_3$, (trojúhelníky), v pravém mají společnou hranu, v levém ne. Možností je spousta.

**Příklad 3.** Dokažte, že následující grafy jsou izomorfní:



Ačkoli to tak ani trochu nevypadá, opravdu se jedná o jeden a ten samý graf, pouze jinak nakreslený. Tenhle příklad je ponechán čtenáři jako cvičení.

Pojďme nyní pokračovat dalšími definicemi.

**Definice.** Graf $G$ se nazývá $k$-regulární, jestliže každý jeho vrchol má stupeň právě $k$.

*BRKOS Team*

Například cyklus libovolné délky je 2-regulární, každý graf $K_n$ je $k-1$-regulární.

**Věta 1.** Každý 2- regulární souvislý graf je cyklus.

**Důkaz.** Postupně graf konstruujme. Začneme jedním vrcholem. Musí mít stupeň 2, proto ho spojme se dvěma dalšími vrcholy, které si označme $0, 1$. Nyní uvažujme jeden z nich, třeba 1. Zatím z něj vede pouze jedna hrana. Jsou dvě možnosti: buď ho musíme spojit s vrcholem 0, který má zatím stupeň 1, nebo s nějakým novým. Když ho spojíme s vrcholem 0, dostáváme souvislý 2 regulární graf a už nic víc udělat nemůžeme, tedy máme hotovo. Když ho spojíme s novým vrcholem, označme si nový vrchol 2, tento nový vrchol bude mít supeň 1. Dále můžeme opakovat stejný argument dokola a dokola, ovšem množina vrcholů je konečná, tedy jednou nám nové vrcholy dojdou a vrchol $n$ budeme muset spojit s vrcholem 0, čímž dostaneme souvislý cyklus.

**Věta 2.** Součet stupňů všech vrcholů grafu $G$ je dvojnásobek počtu jeho hran.

**Důkaz.** Dokazujme indukcí vzhledem k počtu hran. Když bude mít graf 0 hran, součet stupňů je 0, což je dvojnásobek počtu hran. Dále předpokládejme, že pro graf s $n$ hranami tvrzení platí a jednu hranu přidejme. Počet hran se zvýší o 1 a součet stupňů se zvýší o 2, jelikož hrana zvýší dvěma vrcholům stupeň o 1. Tedy tvrzení platí i pro $n+1$.

Důsledkem tohoto tvrzení je, že počet vrcholů lichého stupně musí být sudý, jinak by součet stupňů nemohl být sudý.

**Příklad 4.** Najděte všechny souvislé grafy, které mají právě jeden vrchol stupně 3 a zbylé vrcholy stupně 2.

Ano, takový graf neexistuje, právě kvůli předchozímu důsledku.

## Souvislost grafu

V tomto textu jsem už několikrát zmínil slovo souvislý, aniž bych řekl, co to znamená. Pojďme se nyní podívat na definici. Dále tento pojem lehce zobecníme na k-souvislost.

**Definice.** Graf G se nazývá **souvislý**, jestliže mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta.

Cesta neznamená hrana. To, že mezi vrcholy existuje cesta znamená, že se do něj mohu dostat přes několik hran. Intuitivně se dá souvislý graf představit tak, že se mi nerozsypal na několik částí. Zároveň, když už se graf rozsype, každé z částí se říká komponenta souvislosti. Souvislý graf má tedy právě jednu komponentu souvislosti.

Někdy se můžete potkat s úlohou, že máte nalézt všechny grafy s danou vlastností. Například s tou, že je 2-regulární. Bez nutné souvislosti v zadání je tato úloha obtížnější. Stačí se ale podívat na jednotlivé komponenty souvislosti, na nich úlohu řešit tak, jakobychom předpokládali, že graf je souvislý. Každý graf dané vlastnosti poté bude sjednocením $n$ komponent souvislých grafů s touto vlastností. Například tedy 2-regulární grafy jsou právě disjunktní sjednocení několika (alespoň jednoho) cyklů.

Tento pojem je docela jednoduchý, tak se rovnou pomalu ale jistě vrhněme na to, co znamená ona zmiňovaná $k$-souvislost.

**Definice.** Vrchol $A$ grafu $G$ se nazývá **bod artikulace**, jestliže po odstranění tohoto vrcholů a všech hran vedoucích z něj dostaneme graf který má víc komponent souvislosti než původní graf.

Například pro cestu libovolné délky platí, že každý její "vnitřní"bod, je bod artikulace. (Prostě se rozpadne.) Libovolný cyklus však nemá bod artikulace. Po odstranění libovolného vrcholu nám stále zbyde souvislý graf. V nějakém smyslu je tedy cyklus více souvislý než cesta. Pojďme tedy naformulovat to, oč tu běží.

**Definice.** Řekneme, že graf $G$ je **k-souvislý**, pokud existuje $k$ vrcholů takových, že po jejich odstranění nebude výsledný graf souvislý nebo bude triviální (prázdný nebo jeden smutný samostatný vrchol), zároveň po odstranění libovolných méně než $k$ vrcholů toto nenastane.

Tedy například onen cyklus je 2-souvislý. Dále třeba $K_n$ je $n-1$ souvislý, protože když odstraníme $k-1$ vrcholů, zbyde nám triviální vrchol. Odstraníme li méně vrcholů, vždy zbyde souvislý graf. Každý souvislý graf, který neobsahuje bod artikulace je alespoň 2-souvislý

Podobně se dá zavést něco, čemu se říká hranová souvislost. Jen místo vrcholů budeme vytrhávat hrany a budeme zkoumat, zda se graf rozpadne.

**Definice.** Souvislý graf $G$ nazveme **hranově k-souvislý**, jestliže existuje $k$ hran, které když z grafu odstraníme, výsledný graf bude mít více komponent souvislosti než původní, zároveň pro libovolné číslo menší než $k$ takové hrany neexistují.

**Definice.** Hranu $e$ nazveme most, jestliže po jejím vytrhnutí má graf více komponent souvislosti než původní.

**Věta 3.** Pokud graf $G$ je hranově $k$-souvislý a vrcholově $d$-souvislý, potom $d \leq k$.

Tuto větu si můžete dokázat jako cvičení.

## Nakresli domeček jedním tahem

Asi každý z vás někdy zkoušel kreslit domeček jedním tahem. Zkusíme si rozebrat teorii, která stojí za tím, zda daný obrázek jde nakreslit jedním tahem.

**Definice.** Libovolná posloupnost střídavě hran a vrcholů se nazývá **tah**, jestliže neobsahuje dvě stejné hrany.

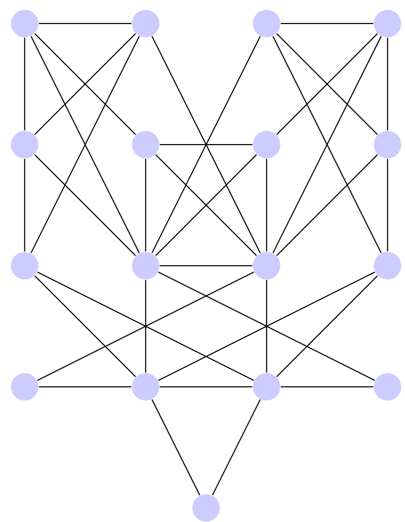
Intuitivně tah znamená, že se můžeme pohybovat libovolně po hranách mezi vrcholy, můžeme klidně projít jedním vrcholem kolikrát chceme, ale nemůžeme projít dvakrát po stejné hraně.

**Věta 4.** Na daném grafu $G$ existuje tah přes všechny hrany, právě tehdy, když počet vrcholů lichého stupně je roven 0 nebo 2.

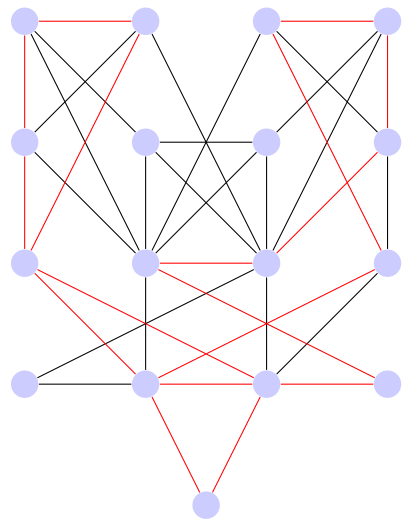
Představme si, co dělá vrchol lichého stupně. Vede z něj lichý počet hran. Kdykoliv do něj vstoupíme, musíme z něj i vystoupit, proto se parita počtu zatím neprojitých hran nezmění. A dva vrcholy mohou mít lichý stupeň, neboť v jednom můžeme začít a v jiném skončit. To nám rovnou dává část návodu, jak takový tah zkonstruovat - musíme začít ve vrcholu lichého stupně a také tam skončit. Krásné je, že mezitím můžeme dělat úplně, co chceme :).

Pokud bychom chtěli najít tah, který začíná a končí ve stejném vrcholu, je potřeba, aby každý stupeň měl sudý stupeň. Pak to zvládneme jednoduše. Ukážeme si na příkladu, jak na to. Takovému tahu se říká Eulerovský tah.

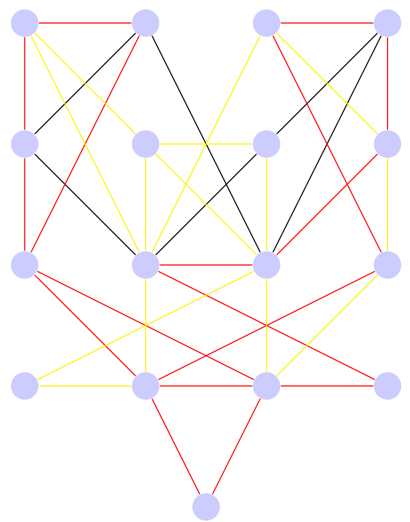
**Příklad 5.** Nalezněte tah, který začíná a končí ve stejném vrcholu.



Začneme v libovolném vrcholu a nalezneme nějaký tah, který opět skončí v tom samém vrcholu, ne nutně přes všechny hrany. Začněmě tedy třeba ve spodním vrcholu.



Tento tah jsem našel úplně náhodně, prostě tam takzvaně "šupnu nějakej random tah". Je vidět, že to zatím není tah přes všechny hrany. Zbývá tedy určitě nějaká hrana, která není použita. Tedy zbývá vrchol, ze kterého zatím vede nepoužitá hrana. Začněme s ním a sestrojme další tah, tentokrát ho udělám žlutě, který začíná a končí v onom vrcholu a vede pouze přes nečervené hrany.



Opět jsme provedli náhodný tah na nepoužitých hranách. Teď už jednoduše vidíme poslední tah na nepoužitých barvách, nechme ho černý. Jak nyní zkonstruujeme náš výsledný tah přes všechny vrcholy? Začněme třeba ve spodním vrcholu a kopírujme původní červený tah, který jsme vytvořili. Pokud narazíme na vrchol, ze kterého vede hrana jiné barvy než červené, navažme na tento tah. Pokud v průběhu tohoto tahu narazíme na poslední barvu, objedeme tento barevný tah, poté se navážeme zpět na druhou barvu, objedeme a dokončíme první žlutou barvu. Tímto způsobem na sebe navážeme všechny tahy a našli jsme graf přes všechny vrcholy.

Věřím, že nyní už každý zvládne nakreslit domeček jedním tahem :-).

*BRKOS Team*

## Barvičky v grafu

V poslední části se budeme zabývat obarvováním grafu. Možná jste někdy slyšeli o větě o 4 barvách, která říká, že každý rovinný (nebudeme se zabývat tím, co to znamená) graf lze obarvit 4 barvami. Podíváme se společně na to, jakými způsoby lze graf obarvovat.

**Definice.** Obarvení grafu $G$ $n$ barvami se definuje jako zobrazení z množiny vrcholů do množiny přirozených čísel {1, 2, ... n}.

Intuitivně - každému vrcholu přiřadíme nějaké číslo (nějakou barvu). Pro nás ale budou důležitá jen některá obarvení.

**Definice.** Řekneme, že obarvení grafu $G$ je **správné**, jestliže libovolné dva vrcholy, které jsou propojeny hranou mají různou barvu.

**Definice.** **Chromatické číslo** grafu $G$ je nejmenší přirozené číslo $n$ takové, že graf lze správně obarvit $n$ barvami.

Tedy například $K_n$ má chromatické číslo $n$, libovolná cesta má chromatické číslo 2, můžeme totiž barvy střídat. Zkuste si ověřit, že chromatické číslo cyklu délky $k$ je 2 pro sudé $k$ a 3 pro liché.

Opět podobným způsobem můžeme obarvovat i hrany.

**Definice.** Libovolné zobrazení z množiny hran do množiny přirozených čísel {1, 2, ... n} nazveme **hranové** obarvení grafu $n$ barvami. Řekneme, že hranové obarvení grafu $G$ je správné, jestliže libovolné dvě hrany, které obsahují společný vrchol mají jinou barvu. Hranové chromatické číslo grafu $G$ je potom nejmenší přirozené $n$ takové, že $G$ lze správně hranově obarvit $n$ barvami.

Pro úplný graf, cestu a cyklus vyjde chromatické číslo vždy stejně jako hranové chromatické číslo, s výjimkou cesty délky 1. Zkuste si najít další příklad grafu, pro který bude chromatické číslo a hranové chromatické číslo jiné. Ve skutečnosti se můžou lišit o libovolné číslo, jaké se vám zachce.

## Závěr

Nakoukli jsme do světa teorie grafů, naučili se pár základních poznatků o grafech a ukázali si nějaké příklady. Oproti tomu, jak je teorie grafů bohatá, jsme se však naučili jen malou část. Mohli bychom například zkoumat rovinné grafy a jejich vlastnosti, podívat se na praktické aplikace, třeba na toky v sítích, problém obchodního cestujícího a podobně. Je toho zkrátka spousta.

Studujte, mějte se rádi a s úsměvem na tváři řešte BrKoS!

*BRKOS Team*