BRněnský KOrespondenční Seminář

XXX. ročník

2023/2024

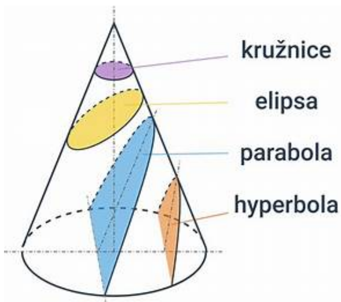
Pomocný text ke 2. sérii

Kuželosečky

autor: *Radka Fojtová*

V tomto studijním textu se spolu podíváme na kuželosečky z geometrického pohledu. Nejdříve si ukážeme, co je to kuželosečka a jaké máme typy. Zároveň si ukážeme spoustu krásných geometrických úloh využívajících právě znalost kuželoseček.

Kuželo Sečka?



První pohled na to, co to kuželosečka je, může být následující. Představme si kuželovou plochu. Kuželová plocha vznikne rotací přímky kolem jiné přímky. Dále si představme libovolnou rovinu, Kterou tuto plochu sekneme, jak název kuželosečka napovídá. Tedy kuželosečka je rovinná křivka, která vznikne jako průnik roviny s rotační kuželovou plochou.

Při téhle konstrukci záleží na tom, jakou vzájemnou polohu bude mít kuželosečka s naší kuželovou plochou. A přesně tak vnikají různé typy kuželoseček, jak je z obrázku patrné. Pro hezkou ilustraci takto vznikajících kuželoseček si můžete doma po tmě svítit baterkou na zeď pod různými úhly. Paprsky světla vytvoří onu kuželovou plochu, zeď naši rovinu, která kužel sekne.

Množina bodů v rovině, ...

Druhý pohled na kuželosečky, který pro nás bude nejdůležitější, už přímo charakterizuje jednotlivé typy kuželoseček. Obecně se dají takto kuželosečky popsat jako množiny bodů v rovině, které splňují nějakou vlastnost. Všichni znáte kružnici, jakožto množinu bodů v rovině, které mají od jednoho konkrétního bodu (středu) stejnou vzdálenost. Ukážeme si, jak podobně popsat další kuželosečky.

Typy kuželoseček

Elipsa

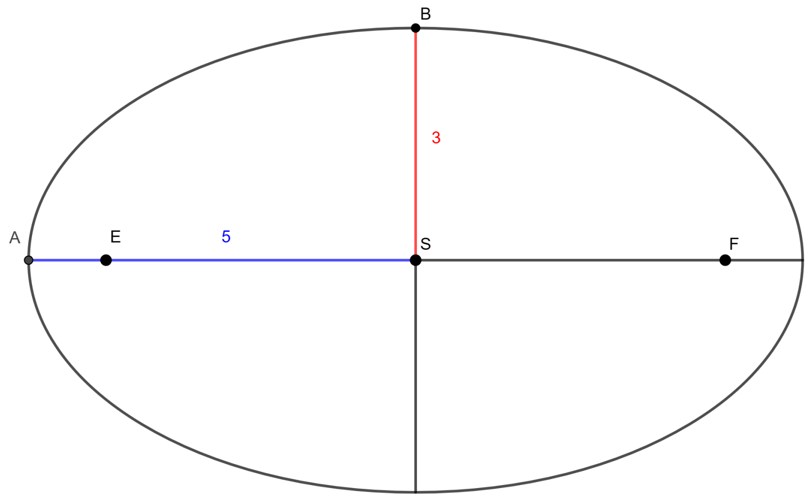
Prním případem, který si rozebereme, je elipsa. Zamyslete se sami, jak elipsa vznikne při průniku roviny s kuželovou plochou. Pro nás bude podstatná právě druhá charakterizace.

Množinu bodů v rovině, které mají od dvou pevně zvolených bodů E, F konstantní součet vzdáleností, nazýváme ***elipsa****.*

Bodům E, F se říká **ohniska**, středu úsečky EF se říká **střed elipsy** a délka této úsečky se nazývá **excentricitida**. Vzdálenost bodu elipsy, který leží na stejné přímce jako ohniska, od středu se nazývá délka **hlavní poloosy**. Naopak vzdálenost bodu elipsy, který leží na ose úsečky EF, od středu se nazývá délka **vedlejší poloosy**. Jako první jednoduché pozorování můžeme zmínit, že kružnice je speciální případ elipsy. Elipsa je kružnicí právě tehdy, když ohniska splývají v jeden bod.

Elipsa je jako jediná z kuželoseček souvislá a uzavřená křivka (souvislost si představte tak, že se dá nakreslit jednou čarou, uzavřenost intuitivně chápejte jako vlastnost, že když začneme v jednom bodě kreslit elipsu, skončíme opět v tom samém bodě).

Úloha 1. Je dána elipsa s ohnisky v bodech E a F a se středem v bodě S. Vypočítejte obsah trojůhelníka EFB, pokud znáte délky poloos elipsy:
$|AS| = 5$ cm; $|BS| = 3$ cm.



Řešení: Nejdříve zjistíme součet vzdáleností bodu elipsy od ohnisek. Zaměřme se na bod A: $|AE|+|AF| = (5-|ES|)+(5+|SF|)$. Víme však, že S je střed úsečky EF, proto $|ES| = |SF|$ a výsledný součet vzdáleností $|AE|+|AF| = 10$ cm. Protože součet vzdáleností bodu elipsy od ohnisek elipsy je vždy konstantní, musí platit: $|BE|+|BF| = 10$ cm. Bod B leží na ose úsečky EF, proto $|BE| = |BF| = 5$ cm. V této fázi známe délky 2 stran pravoúhlého trojúhelníka ESB (FSB) a pomocí Pythagorové věty snadno dopočítáme vzdálenost ohniska od středu: $|ES| = |SF| = \sqrt{5^2-3^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$ cm. Extrencitida je tedy $|ES|+|SF| = 8$ cm a výsledný obsah trojúhelníka EFB v cm^2 je:

$$\frac{|EF|\cdot|SB|}{2} = \frac{8\cdot 3}{2} = 12$$

Hyperbola

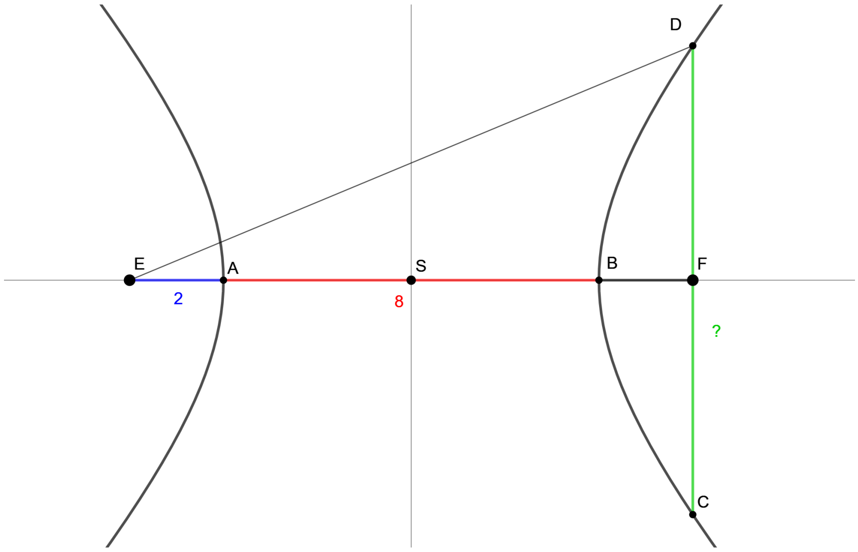
Velmi podobnou definici jako měla elipsa bude mít hyperbola.

Množinu bodů v rovině majících od dvou pevně daných bodů E, F konstantní absolutní hodnotu rozdílu vzdáleností nazýváme ***hyperbola****.* Body hyperboly ležící na úsečce EF se nazývají **vrcholy**. Ohniska, excentricitida a střed hyperboly se definují úplně stejně jako to bylo u elipsy. Co už je u hyperboly jiné?

Hyperbola není ani uzavřená ani souvislá křivka. Dvě souvislé komponenty této křivky se nazývají **větve** hyperboly.

Hyperbola má však jednu zajímavou vlastnost, kterou elipsa ani parabola nemá. Má asymptoty. Hyperbola má dvě asymptoty, tedy přímky ke kterým se hyperbola nekonečně víc a víc přibližuje, avšak nikdy je neprotne. Intuitivně je to zřejmé, ale dá se i formálně dokázat, že tyto asymptoty prochází středem hyperboly.

Úloha 2. Je dána hyperbola s ohnisky E, F, vrcholy A, B a středem S. Veďme kolmici k EF procházející ohniskem. 2 nově vzniklé průsečíky kolmice a hyperboly označme C a D. Určete vzdálenost $|CD|$, pokud víte, že: $|EA| = 2$cm; $|AB| = 8$ cm.



Řešení: Nejdříve vyjádříme rozdíl vzdáleností od ohnisek pro bod A: $|AF| - |EA| = (|AB| + |BF|) - |EA|$ a následně pro bod B: $|EB| - |BF| = (|EA| + |AB|) - |BF|$. Tyto rozdíly jsou stejné, takže musí platit rovnice:

$$|AB| + |BF| - |EA| = |EA| + |AB| - |BF|$$

$$=> |BF| = |AE|$$

Výsledný rozdíl vzdáleností bodu od ohnisek je tedy $|AB| = 8$ cm a extrencitida je $|AE| + |AB| + |BF| = 2 + 8 + 2 = 12$ cm. Teď se zaměřme na bod D (C). Pro ten musí platit: $|DE| - |DF| = 8 => |DE| = |DF| + 8$ cm. Využitím Pythagorové věty dopočítáme $|DF|$:

$$\begin{aligned} (|DF| + 8)^2 &= |DF|^2 + |EF|^2 \\ |DF|^2 + 16|DF| + 64 &= |DF|^2 + 12^2 \\ 16|DF| &= 144 - 64 = 80 \\ |DF| &= 5 \end{aligned}$$

Protože hyperbola je osově souměrná podle osy, na které leží ohniska, výsledná délka $|CD|$ je $2 \cdot |DF| = 10$ cm

Parabola

Poslední "normální"typ kuželosečky je parabola. Parabola má oproti elipse a hyperbole trošku jinou definici:

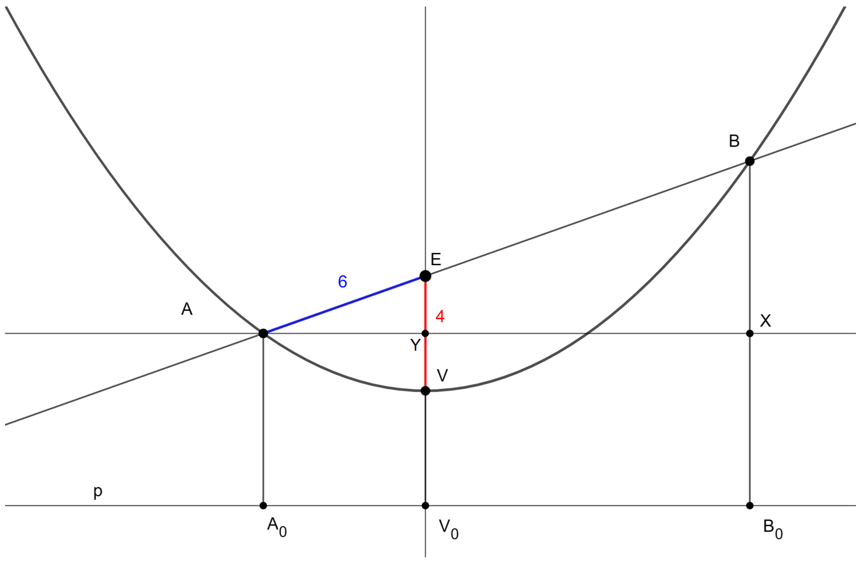
*Množinu bodů v rovině, které mají stejnou vzdálenost od pevně daného bodu E jako od pevně dané přímky p nazýváme **parabola**.*

Přímce p z definice se říká **řídící přímka** paraboly. Bod paraboly, ve kterém tato vzdálenost je minimální, se nazývá **vrchol**. Vrchol paraboly leží na kolmici k řídící přímce spuštěné z ohniska paraboly.

Všimněme si, že parabola není uzavřená křivka (ve skutečnosti v projektivním prostoru je, ale tím se nezabývejme), ale je souvislá.

Parabolu všichni znáte z matematiky. Když jste probírali funkce, jistě jste si říkali, že grafem kvadratické funkce je právě parabola. To souvisí s třetí možnou definicí kuželoseček - definicí pomocí rovnic. Touto definicí se však pro účely druhé série zabývat nemusíme, a tak si spoustu práce ušetříme.

Úloha 3. Je dána parabola se vzdáleností ohniska od vrcholu $|EV| = 4$ cm. Zvolme bod A, který leží na parabole a platí, že $|AE| = 6$ cm. Určete vzdálenost $|AB|$, když víme, že bod B je druhý průsečík paraboly a přímky, na které leží body A a E.



Řešení: Nejdříve je potřeba si uvědomit, co platí pro body na parabole:
$|AE| = |AA_0| = 6$ cm, $|VE| = |VV_0| = 4$ cm a $|BE| = |BB_0| = x$ cm.
Na obrázku je znázorněna pomocná přímka rovnoběžná s řídící přímkou a procházející bodem A. Průsečíky této přímky a úseček BB_0 a EV_0 jsou označeny po řadě X a Y. Protože $AA_0 = 6$ cm, platí $|XB_0| = |YV_0| = 6$ cm. Protože body E, V a V_0 leží na jedné přímce, platí: $|EV_0| = |EV| + |VV_0| = 4 + 4 = 8$ cm a $|YE| = |EV_0| - |YV_0| = 8 - 6 = 2$ cm. $|BX| = |BB_0| - |XB_0| = x - 6$ cm. Body A, E, B leží na jedné přímce, stejně tak A, Y, X. Úsečky EY a BX jsou rovnoběžné, proto jsou trojúhelníky AYE a AXB podobné a platí:

$$\frac{|AE|}{|EY|} = \frac{|AE| + |EB|}{|BX|}$$
$$\frac{6}{2} = \frac{6+x}{x-6}$$
$$3(x-6) = 6 + x \qquad (x \neq 6)$$
$$2x = 24$$
$$x = 12$$

BRKOS Team

Celková vzdálenost $|AB|$ je tedy $|AE| + |EB| = 6 + 12 = 18$ cm.

Degenerované kuželosečky

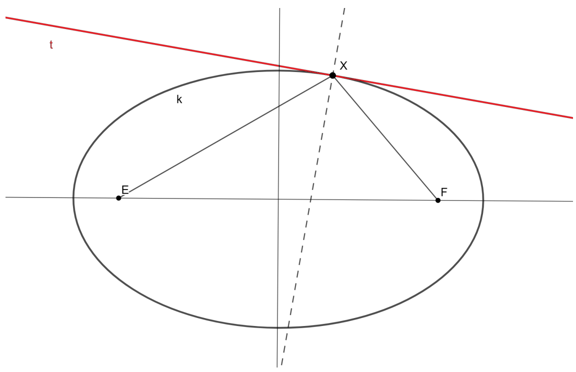
Pozorní z vás si jistě všimli, že průnik roviny a kuželové plochy může být i něco jiného než zmíněné tři typy kuželoseček. Například když rovina povede vrcholem kuželu a v jiném bodě kuželovou plochu neprotne, dostaneme pouze jeden bod. Těmto nezajímavým typům kuželoseček se říká degenerované kuželosečky a patří mezi ně bod, přímka, dvojice rovnoběžek, dvě různoběžné přímky a prázdná množina.

Tečny ke kuželosečkám

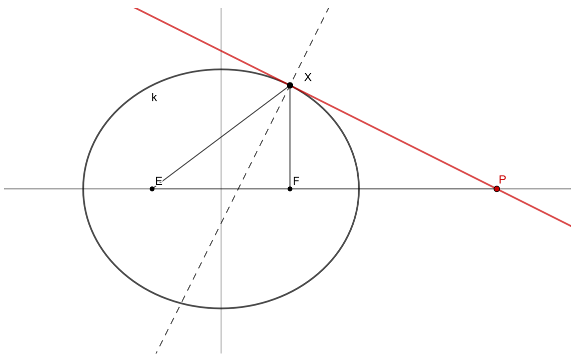
Pokud se dostanete k řešení geometrických problémů týkajících se kuželoseček, je možné, že se vám bude hodit znalost tečen ke kuželosečkám. V následující části textu se postupně podíváme na tečny ke konnrétním kuželosečkám a na jejich vlastnosti.

Tečna k elipse

Mějme zvolený bod X na elipse, kterým chceme vést tečnu. Tato tečna je kolmá na osu úhlu $\sphericalangle EXF$.



Úloha 4. Je dána elipsa s excentricitidou $EF = 20$ cm a délkou hlavní poloosy 20 cm. Je zvolen bod X na elipse takový, který leží na kolmici k hlavní ose procházející ohniskem F. Určete vzdálenost $|FP|$, pokud víme, že P je průsečík hlavní osy s tečnou procházející bodem X.



Řešení: Z úlohy 1. již víme, že vzdálenosti bodů elipsy v součtu dávají 2$x$délku hlavní poloosy, v tomto případě 40 cm. Pro bod X tedy platí $|EX| + |FX| = 40$ cm. EFX je pravoúhlý trojúhelník, proto můžeme využít Pythagorovu větu pro dopočet stran trojúhelníka:

$$|EX|^2 = |EF|^2 + |FX|^2$$
$$(40 - |FX|)^2 = 20^2 + |FX|^2$$
$$1600 - 80|FX| + |FX|^2 = 400 + |FX|^2$$
$$80|FX| = 1200$$
$$|FX| = 15$$

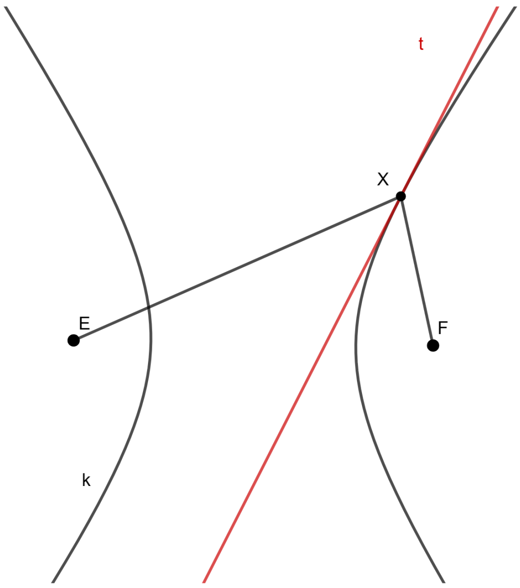
Víme tedy, že $|FX| = 15$ cm a $|EX| = 25$ cm a jsme schopni dopočítat úhel $|\sphericalangle EXF| = arcsin(\frac{|EF|}{|EX|}) = arcsin(\frac{20}{25}) \doteq 53,13°$. $|\sphericalangle FXP| = 90° - \frac{|\sphericalangle EXF|}{2} \doteq 63,435°$. Nakonec využijeme zase znalost trigonometrických funkcí, tentokrát konkrétně tangensu:

$$tan(63,435°) = \frac{|FP|}{|FX|}$$
$$|FX| \cdot tan(63,435°) = |FP|$$
$$|FP| = 15 \cdot 2$$
$$|FP| = 30$$

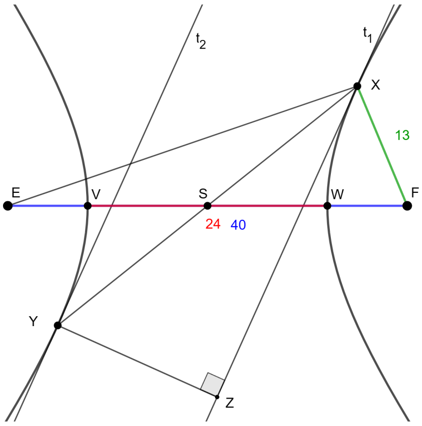
Vzdálenost $|FP|$ je 30 cm.

Tečna k hyperbole

Mějme zvolený bod X na hyperbole, kterým chceme vést tečnu. Tato tečna je osou úhlu $\sphericalangle EXF$.



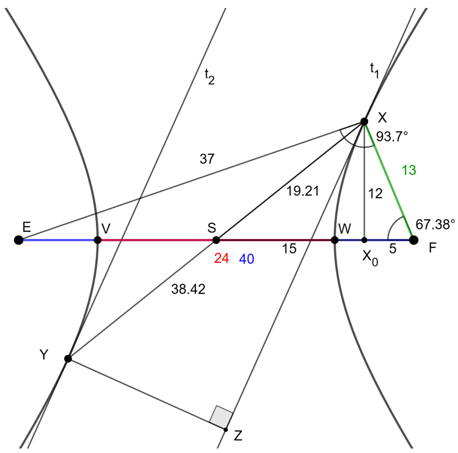
Úloha 5. Mějme hyperbolu se vzdáleností vrcholů $|VW| = 24$ cm a excentricitidou $|EF| = 40$ cm. Je zvolen bod X na hyperbole takový, pro který platí $|XF| = 13$ cm, a bod Y na hyperbole, který leží na jedné přímce s X a se středem hyperboly S. Určete vzdálenost tečen vedených z bodů X a Y.



Řešení: Z úlohy 2. víme, že rozdíl vzdáleností bodu od ohnisek je vzdálenost vrcholů, tedy 24 cm, takže musí platit $|EX| = |FX| + 24 = 13 + 24 = 37$ cm. V trojúhelníku EFX tedy známe délky všech tří stran a jsme schopni dopočítat úhly například pomocí kosinové věty:

$$
\begin{aligned}
|EX|^2 &= |FX|^2 + |EF|^2 - 2|EF||FX|cos(\sphericalangle EFX)\\
cos(\sphericalangle EFX) &= \frac{|FX|^2 + |EF|^2 - |EX|^2}{2|EF||FX|}\\
cos(\sphericalangle EFX) &= \frac{13^2 + 40^2 - 37^2}{2 \cdot 40 \cdot 13}\\
cos(\sphericalangle EFX) &= \frac{5}{13}\\
|\sphericalangle EFX| &\doteq 67,38^\circ\\
cos(\sphericalangle EXF) &= \frac{|FX|^2 + |EX|^2 - |EF|^2}{2|EX||FX|}\\
cos(\sphericalangle EXF) &= \frac{13^2 + 37^2 - 40^2}{2 \cdot 13 \cdot 37}\\
|\sphericalangle EXF| &\doteq 93,7^\circ
\end{aligned}
$$

Pokud zvolíme bod X_0 takový, že XX_0 je výška trojúhelníku EFX, jsme schopni dopočítat délky stran trojúhelníka X_0FX: $sin(\sphericalangle X_0FX) = \frac{|XX_0|}{|FX|}$ => $|XX_0| = 13 \cdot sin(67,38^\circ) = 12$ cm a následně $|X_0F| = 5$ cm. Střed S půlí úsečku EF, proto platí $|SX_0| = |SF| - |FX_0| = 20 - 5 = 15$ cm. Pomocí Pythagorovy věty můžeme dopočítat délku zbývající strany SX trojúhelníka SX_0X. $|SX| = \sqrt{15^2 + 12^2} = 19,21$ cm.



Protože je hyperbola středově souměrná podle středu S, platí: $|XS| = |YS|$ => $|XY| = 2 \cdot |SX| = 2 \cdot 19,21 = 38,42$ cm. Pro zjištění vzdálenosti tečen se nám bude hodit velikost úhlu $\sphericalangle YXZ$, nejdřív však dopočítáme velikost úhlu $\sphericalangle SXF$. Využijeme například sinovou větu, podle které platí:

$$\frac{sin(\sphericalangle SXF)}{|SF|} = \frac{sin(\sphericalangle XFS)}{|SX|}$$
$$sin(\sphericalangle SXF) = \frac{sin(\sphericalangle XFS)}{|SX|} \cdot |SF|$$
$$sin(\sphericalangle SXF) = \frac{sin(67,38°)}{19,21} \cdot 20$$
$$\sphericalangle SXF \doteq 73,95°$$

Protože tečna je osou úhlu $\sphericalangle EXF$, platí
$|\sphericalangle YXZ| = |\sphericalangle SXF| - \frac{|\sphericalangle EXF|}{2} = 73,95 - \frac{93,7}{2} = 27,1°$
Výslednou vzdálenost tečen $|YZ|$ jsme již schopni dopočítat: $sin(\sphericalangle YXZ) = \frac{|YZ|}{|XY|}$ => $|YZ| = sin(\sphericalangle YXZ) \cdot |XY| = sin(27,1°) \cdot 38,42 = 17,5$ cm.

Tečna k parabole

Mějme zvolený bod X na parabole, kterým chceme vést tečnu. Tato tečna je osou úhlu $\sphericalangle EXX_0$, přičemž $|XX_0|$ je vzdálenost bodu X od řídící přímky.