BRněnský KOrespondenční Seminář

XXIX. ročník

2022/2023

Pomocný text ke 4. sérii

Geometrické nerovnosti

autor: *Vít Jelínek*

Vykutálení brkosí orgové si pro vás tentokrát nachystali téma geometrické nerovnosti. Budeme porovnávat hodnoty, které vyplynuly z různých geometrických situací. Pravděpodobně nejznámější geometrickou nerovností (a také naší hlavní zbraní při řešení úloh) je trojúhelníková nerovnost:

Věta 1: Nechť ABC je trojúhelník. Pak platí

$$|AB| + |BC| > |AC|.$$

V tomto textu si ukážeme, jak přistupovat k příkladům, ve kterých máme nějakou geometrickou nerovnost dokázat, takže žádnou teorii nečekejte. Například samotná trojúhelníková nerovnost zde nebude dokázána. Zejména proto, že abychom ji mohli dokázat, tak bychom potřebovali opravdu pořádně definovat spoustu věcí (jako co to je rovina) a zabralo by to spoustu času.

Vzhledem k tomu, že jsme řekli, že nebude žádná teorie, tak vzhůru k prvnímu příkladu! (V obou úlohách budeme uvažovat standardní značení stran v trojúhelníku.)

Úloha 1: Nechť ABC je trojúhelník. Označme t součet délek jeho těžnic a o jeho obvod. Dokažte, že platí $t < o < \frac{4}{3}t$.

Řešení: Budeme chtít hledat vhodné trojúhelníky, ve kterých se podíváme na trojúhelníkovou nerovnost. Začněme s druhou nerovností (tedy $o < \frac{4}{3}t$). Vhodnou strategií může být najít pro každou stranu nějaký horní odhad na její délku pomocí těžnic. Když všechny tyto odhady sečteme, tak získáme na levé straně obvod a na pravé straně nějaký výraz vzniklý z délek těžnic, který s trochou štěstí bude požadovaného tvaru.

Hledejme tedy nějaký trojúhelník, jehož dvě strany budou tvořeny těžnicemi (nebo aspoň jejich částmi) a třetí strana bude jedna ze stran trojúhelníka. Označíme-li T těžiště ABC, tak hned dostaneme vhodného kandidáta! Trojúhelník ABT má strany délek:

$$\begin{aligned} |AB| &= c, \\ |AT| &= \frac{2}{3}t_a, \\ |BT| &= \frac{2}{3}t_b, \end{aligned}$$

přičemž t_a je těžnice z vrcholu A do středu strany a a podobně je to u t_b, t_c. Trojúhelníková nerovnost nám tedy dá odhad

$$c < \frac{2}{3}(t_a + t_b).$$

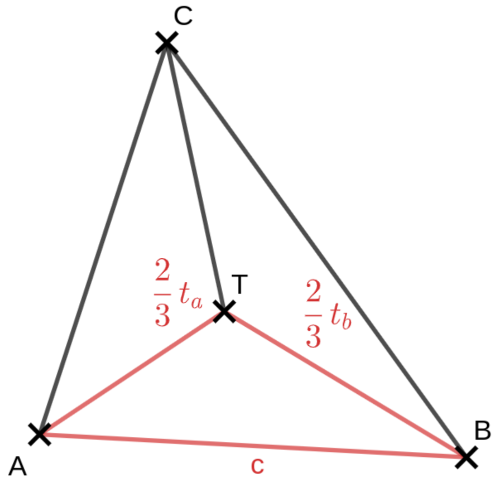
Podíváme-li se podobně na trojúhelníky BCT a ACT, tak dostaneme navíc odhady:

$$\begin{aligned} a &< \frac{2}{3}(t_b + t_c), \\ b &< \frac{2}{3}(t_c + t_a). \end{aligned}$$

Sečtením všech tří odhadů dostaneme

$$o = a + b + c < \frac{2}{3}(t_b + t_c + t_c + t_a + t_a + t_b) = \frac{4}{3}t,$$

což jsme chtěli dokázat.

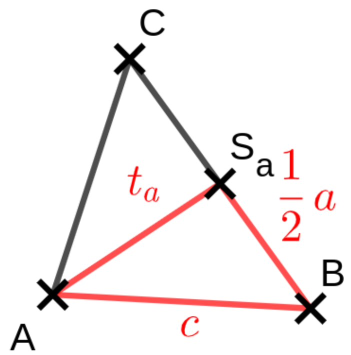


Pojďme tedy na druhou část příkladu (tedy nerovnost $t < o$). Budeme postupovat podobně – hledáme tedy nějaký trojúhelník, jehož jedna strana je těžnice a další dvě strany souvisí s délkami stran našeho trojúhelníka. Označme S_a (resp. S_b, S_c) střed strany a (resp. b, c). Pak přirozený kandidát je trojúhelník AS_aB se stranami:

$$|AS_a| = t_a,$$
$$|S_aB| = \frac{1}{2}a,$$
$$|AB| = c.$$

Trojúhelníková nerovnost nám tedy dává odhad

$$t_a < \frac{1}{2}a + c.$$



Podíváme-li se na trojúhelníky BS_bC a CS_cA, tak dostaneme ještě odhady:

$$t_b < \frac{1}{2}b + a,$$
$$t_c < \frac{1}{2}c + b.$$

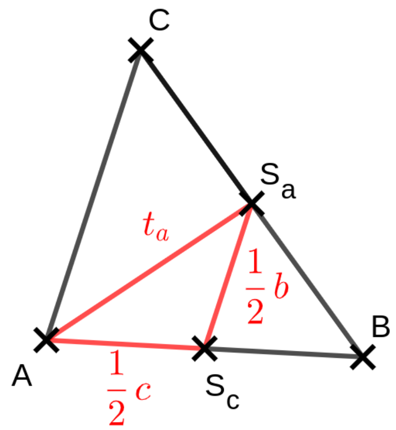
Sečtením všech tří odhadů získáme nerovnost

$$t = t_a + t_b + t_c < \frac{1}{2}(a+b+c) + (a+b+c) = \frac{3}{2}o.$$

To je ale slabší nerovnost, než jakou jsme chtěli dokázat! Ukázalo se, že jsme nevybrali dobře naše trojúhelníky! Udělejme následující úvahu: uvážíme-li trojúhelník AS_aX, kde X je libovolný vnitřní bod strany AB, tak dostaneme odhad:

$$t_a < |AX| + |XS_a|.$$

Ať už X zvolíme libovolně, tak tento odhad bude lepší než odhad, který jsme dostali předtím (toto vyplývá z trojúhelníkové nerovnosti pro trojúhelník XS_aB). Jde tedy jen o to zvolit X tak, abychom měli nějakou kontrolu nad $|AX|$ a $|XS_a|$. Nyní už si jen stačí vzpomenout na vlastnost střední příčky: $|S_aS_c| = \frac{1}{2}b$. Volbou $X = S_c$ tedy dostaneme $|AX| = \frac{1}{2}c, |XS_a| = \frac{1}{2}b$. Trojúhelníková nerovnost má tedy tvar $t_a < \frac{1}{2}(b+c)$. Podobně získáme analogické nerovnosti pro t_b, t_c a sečtením všech tří nerovností dostaneme přesně $t < o$, což jsme chtěli ukázat.



Zdůrazněme ponaučení, které jsme získali při řešení první části dokazované nerovnosti! **Pokud nedostáváme odhad, který chceme, tak se možná koukáme na špatný trojúhelník!**

BRKOS Team

Při řešení geometrických úloh bývá často výhodné zapojit do boje obsahy a to i v případě, že se v zadání úlohy vůbec nevyskytují. Stejně tak tomu je při dokazování geometrických nerovností. V následující úloze si ukážeme, nejjednodušší možné použití obsahů:

Úloha 2: V trojúhelníku ABC označme v_a (resp. v_b, v_c) výšku na stranu a (resp. b, c). Dokažte, že platí

$$\frac{1}{v_a} + \frac{1}{v_b} > \frac{1}{v_c}.$$

Řešení: Nerovnost ze zadání je podobná trojúhelníkové nerovnosti, jen obsahuje délky výšek místo stran. Délky stran se dají vyjádřit pomocí délek výšek pomocí vzorce pro obsah: $a = \frac{2S}{v_a}$. Uděláme-li to pro všechny strany a dosadíme do trojúhelníkové nerovnosti, tak dostaneme:

$$\frac{2S}{v_a} + \frac{2S}{v_b} > \frac{2S}{v_c};$$

po vydělení $2S$ dostaneme požadovanou nerovnost.

Tak to bylo základní použití obsahů při dokazování geometrických nerovností. Občas se dají využít mnohem sofistikovaněji (například pokud je nějaký útvar uvnitř jiného). A to je od nás vše! Teda skoro vše, ještě pro vás máme nachystány čtyři tématické úlohy, tak šupky dupky se pusťte do řešení!

BRKOS Team