BRněnský KOrespondenční Seminář

XXIX. ročník

2022/2023

Pomocný text ke 2. sérii

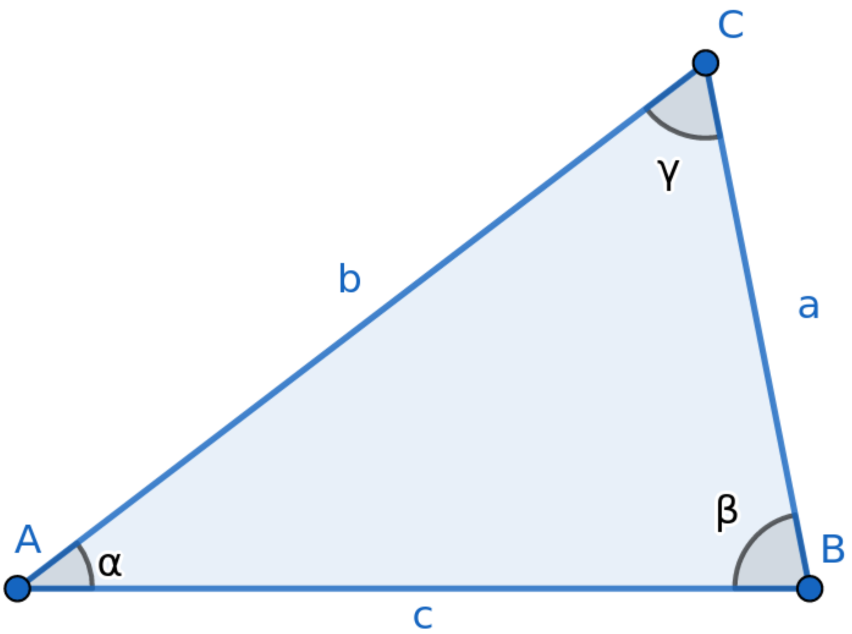
Švrčkův bod

autor: *Dalibor Kramář*

Tématem druhé série jsou konstrukční úlohy a Švrčkův bod. U konstrukčních úloh si řekneme, jak mají být sepsány úlohy a ukážeme si dva řešené příklady. U Švrčkova bodu si ukážeme jeho zajímavé vlastnosti, které se vám mohou hodit při řešení úloh. Ve studijním textu budeme využívat vlastností obvodových a středových úhlů, které jsme popsali předminulý ročník Brkosu. Úvodní text ohledně obvodových a středových úhlů naleznete na této adrese:

`https://brkos.math.muni.cz/files/povidani/povidani274.pdf`.

V celém textu je dodržována konvence, že úhel při vrcholu A značíme α, úhel při vrcholu B značíme β a úhel při vrcholu C značíme γ.



Švrčkův bod

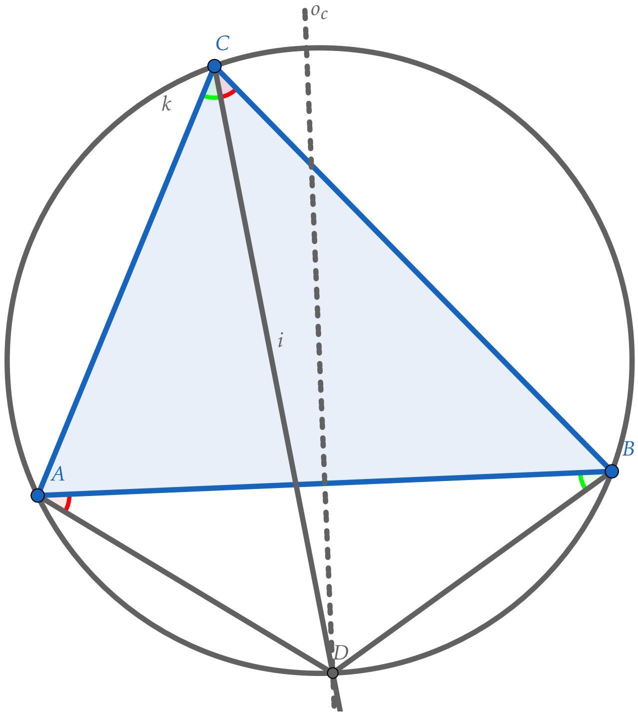
Definice. Nechť $\triangle ABC$ je trojúhelník a ω je kružnice opsaná trojúhelníku $\triangle ABC$. Průsečík kružnice ω a osy úhlu $\sphericalangle BAC$ se nazývá Švrčkův bod trojúhelníka $\triangle ABC$ (vzhledem k A). Budeme jej značit S_a.

Věta. Švrčkův bod S_a leží na ose úsečky BC.

Důkaz. Jelikož S_a leží na ose úhlu $\sphericalangle BAC$, pak $|\sphericalangle BAS_a| = |\sphericalangle S_aAC| = \frac{|\sphericalangle CAB|}{2}$. Jelikož čtyřúhelník ABS_aC je tětivový, pak úhly $\sphericalangle S_aAC$ a $\sphericalangle S_aBC$ (respektive $\sphericalangle S_aAB$ a $\sphericalangle S_aCB$ jsou obvodové), proto

$$|\sphericalangle S_aBC| = |\sphericalangle S_aAC| = |\sphericalangle S_aAB| = |\sphericalangle S_aCB|.$$

Trojúhelník $\triangle S_aBC$ je tedy rovnoramenný, proto $|BS_a| = |CS_a|$ a tedy S_a leží na ose úsečky BC.



Obrázek 1: Obrázek k důkazu, že Švrčkův bod leží na ose úsečky BC.

Definice. Kružnice připsaná trojúhelníku $\triangle ABC$ u strany a je kružnice, která se dotýká strany a a přímek AB a AC a přitom není kružnicí vepsanou trojúhelníku $\triangle ABC$. Střed kružnice připsané trojúhelníku $\triangle ABC$ u strany a budeme značit E_a.

Definice. V je střed kružnice vepsané trojúhelníku $\triangle ABC$.

Věta. Bod S_a je střed Thaletovy kružnice k nad průměrem VE_a, body B a C leží na kružnici k.

Důkaz. Nejdříve ukážeme, že $BV \perp BE_a$: $|\sphericalangle VBE_a| = |\sphericalangle VBC| + |\sphericalangle CBE_a| = \frac{|\sphericalangle ABC|}{2} + \frac{\pi - |\sphericalangle ABC|}{2} = \frac{\pi}{2}$. Zbývá ukázat, že S_a je střed úsečky VE_a.

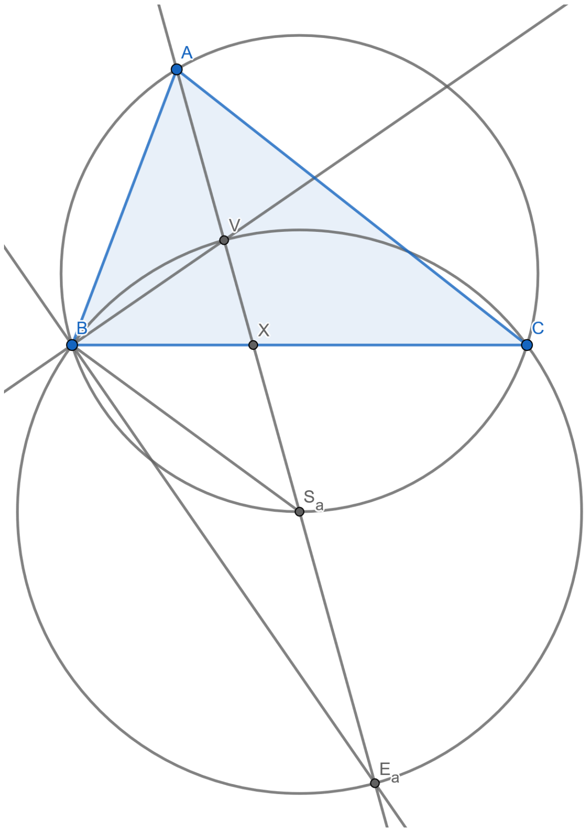
Ukážeme, že trojúhelník $\triangle S_ABV$ je rovnoramenný: $|\sphericalangle VBS_a| = |\sphericalangle VBC| + |\sphericalangle CBS_a| = \frac{\beta}{2} + \frac{\alpha}{2}$. Nechť X je průsečík přímek VA a BC, pak $|\sphericalangle AXB| = \pi - |\sphericalangle BAX| - |\sphericalangle ABX| = \pi - \frac{\alpha}{2} - \beta$. Velikost úhlu $\sphericalangle BVS_a$ vyjádříme z trojúhelníka $\triangle BVX$: $|\sphericalangle BVS_a| = \pi - |\sphericalangle VXB| - |\sphericalangle VBX| = \pi - |\sphericalangle AXB| - |\sphericalangle VBC| = \pi - (\pi - \frac{\alpha}{2} - \beta) - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$.

Jelikož je úhel $\sphericalangle VBE_a$ pravý, lze dopočíst úhly $|\sphericalangle E_aBS_a|$ a $|\sphericalangle BE_aS_a|$. Vidíme, že

$$|\sphericalangle E_aBS_a| = \frac{\pi}{2} - |\sphericalangle VBS_a| = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

a $|\sphericalangle BE_aS_a| = \pi - \frac{\pi}{2} - |\sphericalangle BVS_a| = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$. Proto trojúhelník $\triangle E_aS_aB$ je rovnoramenný.

Z rovnoramenných trojúhelníků $\triangle E_aS_aB$ a $\triangle BS_AV$ dostáváme $|E_aS_a| = |S_aB| = |S_aE_a|$. Tedy S_a je střed úsečky E_aV.



Obrázek 2: Obrázek k důkazu, že Švrčkův bod S_a je střed τ_{E_aV}

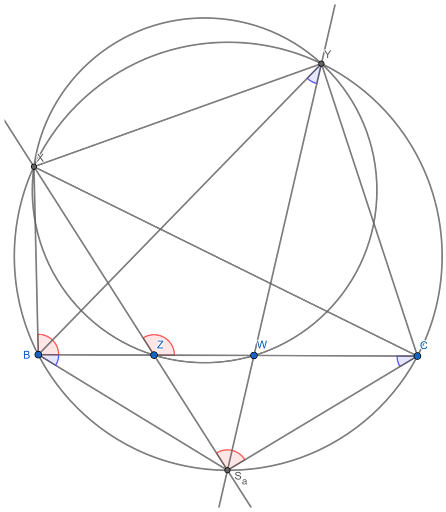
Věta. Bodem S_a veďme přímky p a q, které protnou kružnici ω postupně v bodech X a Y a stranu BC protnou postupně v bodech Z a W. Pak body X, Y, Z a W leží na jedné kružnici.

Důkaz. Bez újmy na obecnosti se oblouk BC, který neobsahuje S_a, dělí na oblouky BX, XY a YC (případ, kdy X a Y jsou na oblouku v opačném pořadí se dokáže analogicky).

Jelikož čtyřúhelník $YXBS_a$ je tětivový, tak $|\sphericalangle XBS_a| + |\sphericalangle S_aYX| = \pi$. Abychom dokázali, že $XYWZ$ je tětivový, je třeba ukázat $|\sphericalangle XZW| + |\sphericalangle WYX| = \pi$. Protože $|\sphericalangle WYX| = |\sphericalangle S_aYX|$ a $|\sphericalangle XZC| = |\sphericalangle XZW|$ stačí ukázat, že $|\sphericalangle XBS_a| = |\sphericalangle XZC|$.

Úhly $\sphericalangle XBC$ a $\sphericalangle XS_aC$ jsou obvodové. Jelikož S_a leží na ose úsečky, pak $|\sphericalangle S_aBC| = |\sphericalangle S_aCB|$. Z trojúhelníku $\triangle ZS_aC$ spočteme úhel $\sphericalangle S_aZC$: $|\sphericalangle S_aZC| = \pi - |\sphericalangle XS_aC| - |\sphericalangle S_aCB|$. Jelikož $\sphericalangle XZC$ je vedlejší úhel k úhlu $\sphericalangle S_aZC$, pak $|\sphericalangle XZC| = \pi - |\sphericalangle S_aZC| = \pi - (\pi - |\sphericalangle XS_aC| - |\sphericalangle S_aCB|) = |\sphericalangle XS_aC| + |\sphericalangle S_aCB| = |\sphericalangle XBC| + |\sphericalangle S_aBC| = |\sphericalangle XBS_a|$.

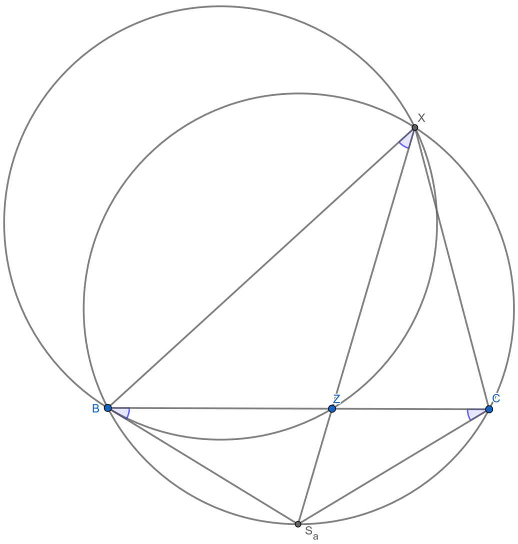
BRKOS Team



Obrázek 3: Obrázek k důkazu věty o tětivovém čtyřúhelníku

Věta. Bodem S_a veďme přímku p, která protne postupně stranu BC v bodě Z a kružnici ω protne podruhé v X. Pak bod S_a leží na tečně kružnice opsané k trojúhelníku $\triangle BZX$ v bodě B.

Důkaz. Jelikož $\sphericalangle BXZ = \sphericalangle BXS_a = \sphericalangle BCS_a = \sphericalangle S_aBC = \sphericalangle S_aBZ$, vidíme, že $\sphericalangle ZBS_a$ je úsekový úhel ke kružnici opsané trojúhelníku $\triangle BZX$.



Obrázek 4: Obrázek k důkazu věty o tečně BS_a.

BRKOS Team

Konstrukční úlohy

Konstrukční úlohy typicky sestávají z těchto částí:

- Zadání
- Náčrt
- Rozbor
- Zápis konstrukce
- Řešení
- Diskuze o počtu řešení

Ačkoliv obrázek řešení není povinnou součástí úloh, doporučuji jej vložit do úlohy. Usnadňuje porozumění textu a v případě překlepu v jiné části úlohy je větší šance, že opravující pochopí, co jste ve skutečnosti mysleli.

Zadání

Jedná se o textové zadání úlohy, které najdete v úlohách.

Náčrt

Náčrt je obrázek, který překresluje zadání do grafické podoby. Má obsahovat pouze objekty (přímky, body, kružnice, ...), které se vyskytují v zadání. Slouží především k tomu, aby čtenář lépe pochopil zadání.

Rozbor

Jedná se o stěžejní část úlohy, ve které jsou vysvětleny myšlenky řešení. S pomocí rozboru má být čtenáři jasné, proč je zápis konstrukce řešením úlohy. Rozbor se nejvíce podobá důkazu u jiných typů úloh. Součástí rozboru obvykle bývají obrázky, které ilustrují důkazy pomocných tvrzení.

Zápis konstrukce

Zápis konstrukce je postup (seznam kroků), který jednoznačně popisuje, jak vytvořit požadovaný objekt. Jeden krok v zápisu nemusí být jeden krok v narýsování, ale může obsahovat jednoduchou euklidovskou konstrukci (například kolmici na přímku v bodě, osu úsečky, tečnu z bodu, konstrukci trojúhelníku podle vět *sss*, *sus*, *usu* nebo *Ssu*, ...). Jednotlivé kroky musí být popsány jednoznačně. Můžete použít buď symbolický popis, nebo slovní (například obě možnosti zápisu „$T \in k \cap p$“ i „bod T jako průsečík p a k“ jsou v pořádku).

BRKOS Team

Řešení

Řešení je obrázek, který překresluje zápis konstrukce do grafické podoby. Slouží především k tomu, aby se čtenář lépe zorientoval v zápisu konstrukce. Není tedy povinnou součástí úlohy, ale je dobrým zvykem jej vložit do sepsané úlohy.

Pomocné konstrukce doporučuji odlišovat tím, že budou zakresleny tenkou čarou; zejména pokud zvolíte rýsování na papír, kde je nutné nakreslit všechny objekty i při rýsování euklidovských konstrukcí.

Diskuze o počtu řešení

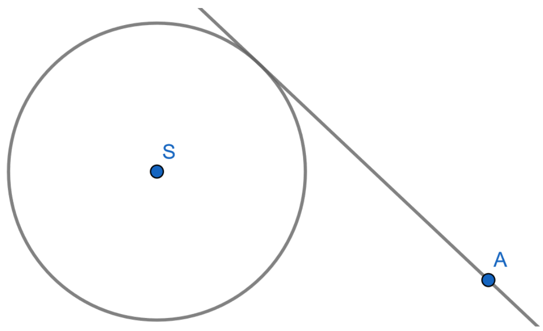
Úloha může mít více než jedno řešení. Počet řešení může záviset na poloze zadaných objektů, proto je potřeba zmínit, za jakých podmínek bude mít úloha kolik řešení.

Rozlišujeme polohové a nepolohové úlohy. Polohové jsou takové úlohy, ve kterých jsou některé objekty zadané a máme k nim sestrojit další útvar. Příkladem polohové úlohy je konstrukce tečny z bodu ke kružnici. U takových úloh se každý objekt, který splňuje zadání, počítá jako řešení.

U nepolohových úloh nejsou zadané žádné objekty a úkolem je sestrojit objekt, který splňuje nějaké vlastnosti. Příkladem nepolohové úlohy je konstrukce trojúhelníku. U takových úloh považujeme za jedno řešení všechny shodné útvary.

Příklady konstrukčních úloh

Příklad. Je dána kružnice k se středem S a bod A. Sestrojte tečnu t ke kružnici k procházející bodem A.



Obrázek 5: Náčrt

Rozbor. Označme bod dotyku T. Víme, že tečna je kolmá na poloměr, tedy úhel $\sphericalangle ATS$ je pravý. Proto bod T leží na Thaletově kružnici τ_{AS} nad průměrem AS. Naopak nachází-li se bod T na kružnicích k a τ_{AS}, je úhel $\sphericalangle ATS$ pravý a AT je poloměr. Proto AT je tečna ke kružnici k.

V případě, že $T = A$, není přímka AT definována jednoznačně. To nastane v případě, že $A \in k$. Jelikož je tečna kolmá na poloměr, zkonstruujeme tečnu snadno jako kolmici na AS v bodě A.

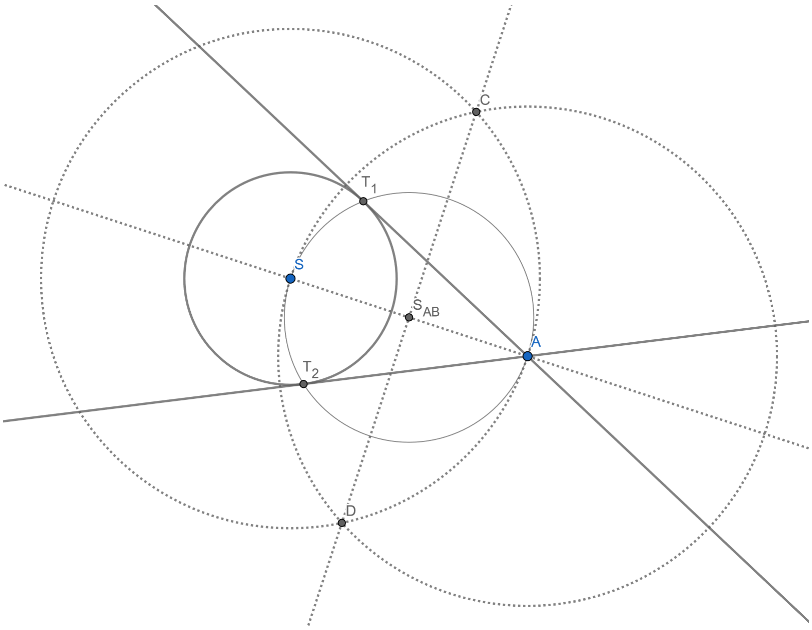
Zápis konstrukce. Protože zápis konstrukce je jiný pro případ, kdy $A = T$, musíme uvést oba zápisy konstrukce:

Pro A ležící vně kružnice:

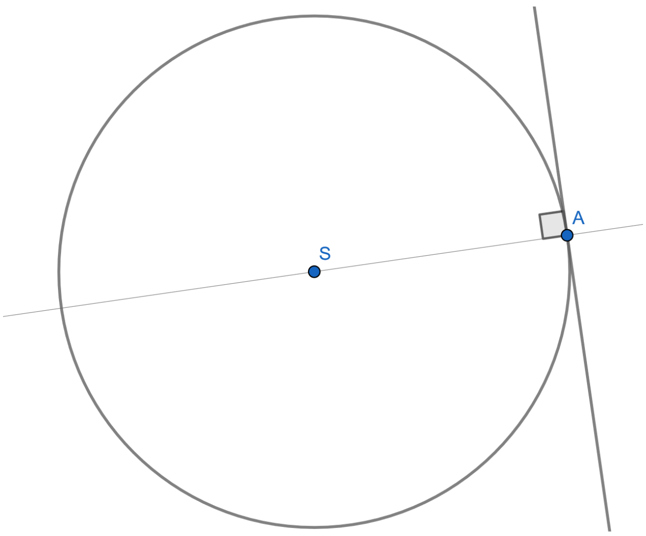
- τ_{AS}, τ_{AS} je thaletova kružnice nad průměrem AS
- $T, T \in k \cap \tau_{AS}$
- $\overleftrightarrow{AT}$

Pro A ležící na kružnici:

- $\overleftrightarrow{AS}$
- $p, p \perp \overleftrightarrow{AS}, A \in p$



Obrázek 6: Řešení situace, kdy bod A leží vně kružnice k.

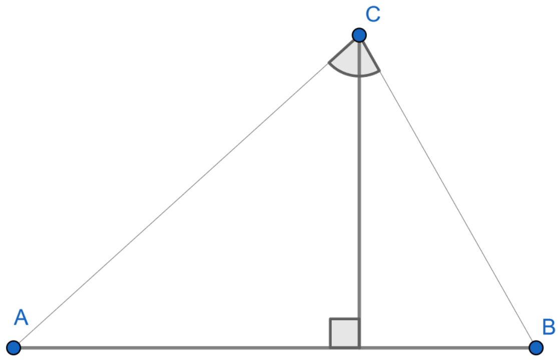


Obrázek 7: Řešení situace, kdy bod A leží na kružnici k.

BRKOS Team

Počet řešení. Pokud A je vně kružnice k, má úloha dvě řešení. Pokud A leží na kružnici k, úloha má jedno řešení. Pokud A leží uvnitř kružnice k, nemá úloha žádné řešení (už proto, že tečna je přímka, která má s kružnicí společný právě jeden bod a její zbytek leží vně kružnice).

Příklad. Sestrojte trojúhelník $\triangle ABC$, znáte-li c, v_c a γ.



Obrázek 8: Náčrt

Rozbor. Nejdříve ukážeme, že pokud dva shodné úhly ke stejné úsečce jsou v jedné polorovině, pak jsou to obvodové úhly ke stejnému středovému úhlu. Uvažme trojúhelníky $\triangle KLM$ a $\triangle KLM'$, kde $|\sphericalangle KML| = |\sphericalangle KM'L| = \varphi$. Středy kružnic jim opsaných označme S a S'. Proto $|\sphericalangle KSL| = 2\varphi = |\sphericalangle KS'L|$. Jelikož oba středy leží na ose úsečky KL, pak oba trojúhelníky $\triangle KLS$ a $\triangle KLS'$ jsou rovnoramenné. Body S a S' leží ve stejné polorovině od přímky KL, protože středové úhly neobsahují vrcholy obvodového úhlu (viz definice obvodového úhlu ve studijním textu předcházejícího ročníku). Protože $|\sphericalangle KLS| = \frac{\pi}{2} - \varphi = |\sphericalangle KLS'|$, $|\sphericalangle LKS| = \frac{\pi}{2} - \varphi = |\sphericalangle LKS'|$ a body S a S' leží ve stejné polorovině, pak $S = S'$. Proto body K, L, M a M' leží na jedné kružnici.

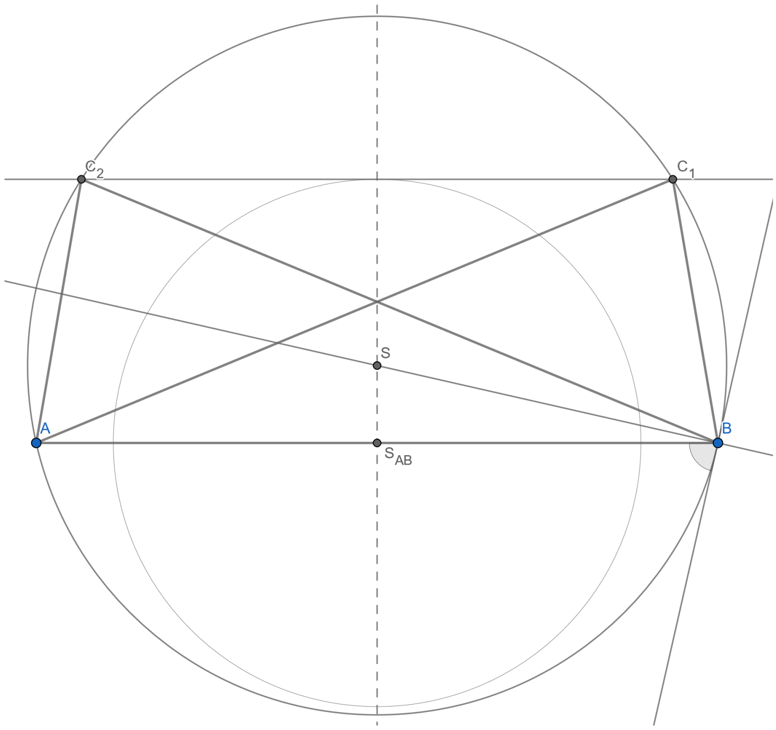
Pomocí předchozího tvrzení víme, že množina bodů v polorovině, pod kterou je vidět úsečka pod úhlem γ je (otevřený) oblouk nad úsečkou AB. Označme S střed kružnice opsané trojúhelníku $\triangle ABC$. Jelikož je $\triangle ABS$ rovnoramenný trojúhelník, pak $|\sphericalangle ABS| = \pi - \frac{|\sphericalangle ASB|}{2} = \pi - \gamma$.

Jelikož známe výšku v_c, tak bod C musí ležet na rovnoběžce s AB, která je od ní vzdálená délku úsečky v_c.

Zápis konstrukce.

- p
- $A, A \in p$
- $B, B \in p, |AB| = c$
- $\sphericalangle BAX, |\sphericalangle BAX| = \gamma$
- $q, q \perp \overleftrightarrow{AX}, A \in P$
- o_{AB}
- $S, S \in o_{AB} \cap q$
- $k, k(S, |SA|)$
- $r, r \parallel p, |pr| = v_c$
- $C, C \in r \cap k$
- $\triangle ABC$

BRKOS Team



Obrázek 9: Řešení

Počet řešení. Pokud přímka q neprotne kružnici k, pak úloha nemá řešení (odvážní si můžou dokázat, že to nastane v případě, že $c < 2\tan\frac{\gamma}{2}$). Pokud se přímka q dotkne kružnice k, pak má úloha jedno řešení (to nastane v případě, že $c = 2\tan\frac{\gamma}{2}$). Pokud přímka q protne kružnici k, pak úloha má dvě řešení. Tato řešení považujeme za různá, protože trojúhelníky $\triangle ABC_1$ a $\triangle ABC_2$ nejsou shodné. Jsou shodné pouze trojúhelníky $\triangle ABC_1$ a BAC_2. Řešení symetrická podle osy $\overleftrightarrow{AB}$ jsou shodná s trojúhelníky $\triangle ABC_1$ a $\triangle ABC_2$ (úloha má dvě řešení v případě, že $c > 2\tan\frac{\gamma}{2}$).

BRKOS Team