BRněnský KOrespondenční Seminář

XXVIII. ročník

2021/2022

Pomocný text k 5. sérii

Nerovnosti

autor: *Tomáš Perutka*

V tomto textu si představíme některé základní nerovnosti, které můžeme v matematice (a řešení páté série) použít.

Nejprve si řekněme, co to vlastně nerovnost je. Jedná se o fenomén objevující se napříč celou matematikou – především v pokročilé matematické analýze a teorii metrických prostorů. V nerovnosti se objevují dva výrazy několika proměnných – říkejme jim $F(x_1, ..., x_n)$, $G(x_1, ..., x_n)$ – a mezi nimi některé ze čtyř znamének „$\leq, \geq, <, >$“, které tyto dva výrazy porovnává. Proměnné x_1, ..., x_n jsou obvykle nezáporná reálná čísla a porovnání musí platit pro libovolné hodnoty těchto proměnných: tedy nerovnost „$F(x_1, \ldots, x_n) \leq G(x_1, \ldots, x_n)$“ znamená, že *pro všechna* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_0^+$ *platí* $F(x_1, \ldots, x_n) \leq G(x_1, \ldots, x_n)$.

Ukažme si nějaký jednoduchý příklad! Tím může být např. nerovnost $(x_1 + \cdots + x_n)^2 \geq 0$. Ta zřejmě platí pro libovolná reálná $x_1, \ldots, x_n$, neboť druhá mocnina je vždy nezáporná. Dalším příkladem může být nerovnost $\sqrt{x+1} \geq 1$; ta platí pro všechna $x \in \mathbb{R}_0^+$. Jelikož $x + 1$ je číslo větší nebo rovno jedné, pro jeho odmocninu musí platit totéž. Nerovnost $x^2 + 6 \geq 5x$ platná není – sice platí pro nekonečně mnoho nezáporných reálných čísel (třeba všechna větší než 3), ale neplatí např. pro $x = \frac{5}{2}$.

Trošku zajímavější příklad je nerovnost $x^2 + y^2 \geq 2xy$. U ní už na první pohled není zřejmé, jestli platí či ne, a je tedy potřeba to dokázat. S nerovností provedeme jednoduchou ekvivalentní úpravu: od obou stran odečteme $2xy$ a dostaneme $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$. Levou stranu této nerovnosti si můžeme rozložit jako $(x - y)^2$, tedy platnost původní nerovnosti je ekvivalentní platnosti nerovnosti $(x - y)^2 \geq 0$ a ta zřejmě platí. Tento princip úpravy na čtverec se využívá často i u mnohem složitějších nerovností.

Předchozí nerovnost jsme nezmínili jen tak náhodou. Je důsledkem obecnější nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem:

Věta. Pro libovolnou n-tici nezáporných reálných čísel $x_1, \ldots, x_n$ platí následující vztah, tzv. **AG nerovnost**:

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

Rovnost obou výrazů nastane, právě když $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Výraz nalevo, tj. součet několika čísel podělený počtem sčítanců, se nazývá **aritmetický průměr**. Výraz napravo, tj. n-tá odmocnina ze součinu n čísel, se nazývá **geometrický průměr**. Dosazením $n = 2$, $x_1 = x^2$, $x_2 = y^2$ dostáváme nerovnost z předchozího odstavce. Dosazením $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = \frac{1}{x}$ zase dostaneme zajímavou nerovnost $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Tedy součet čísla s jeho převrácenou hodnotou nikdy neklesne pod dvojku. Navíc jsme schopni říct, kdy se tento součet bude dvojce rovnat: podle AG nerovnosti k tomu dojde, právě když $x = \frac{1}{x}$, tedy v případě $x = 1$.

AG nerovnost je ovšem pouze špičkou ledovce. Nerovností mezi průměry existuje celá řada: pro každé $m \in \mathbb{N}$ definujme *m-tý mocninný průměr* čísel $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_0^+$ jako

$$P_m(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[m]{\frac{x_1^m + \cdots + x_n^m}{n}}.$$

Jelikož můžeme psát $P_m(x_1, \ldots, x_n) = (\frac{1}{n}(x_1^m + \cdots + x_n^m))^{\frac{1}{m}}$, tento vzorec dává smysl i pro záporná celá čísla: speciálně pro $m = -1$ dostáváme tzv. **harmonický průměr**

$$P_{-1}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}}.$$

Je zvykem si navíc dodefinovat nultý mocninný průměr jako geometrický průměr, tedy $P_0(x_1, \ldots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$. To možná působí trochu zvláštně, ale uvidíte, že nám to hezky sedne do této série nerovností:

Věta. Nechť k, l jsou celá čísla větší než -2 splňující $k > l$. Potom platí nerovnost

$$P_k(x_1, \ldots, x_n) \geq P_l(x_1, \ldots, x_n).$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $x_1 = \cdots = x_n$.

Pro $k = 1$, $l = 0$ takto dostáváme AG nerovnost. Dále např. pro $k = 2$, $l = 1$ dostaneme rovněž zajímavou nerovnost: po tom, co se zbavíme odmocnin, dostaneme

$$n(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \geq (x_1 + \cdots + x_n)^2.$$

Tuto nerovnost ovšem můžeme dokázat také jako speciální případ tzv. **Cauchy-Schwarzovy nerovnosti**. To je nerovnost, která má v matematice opravdu důležité místo (resp. její různá zobecnění) – například ve funkcionální analýze se používá snad v každé druhém argumentu :-)

Věta. Pro reálná čísla $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ platí následující nerovnost:

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(y_1^2 + \cdots + y_n^2) \geq (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2.$$

U této nerovnosti nastíníme jeden z jejich důkazů, jelikož jeho myšlenka je velmi pěkná, užitečná a navíc má geometrický základ! Zamysleme se nad následující situací: v kartézské rovině máme trojúhelník s vrcholy v bodech $[0, 0]$, $[x_1, x_2]$, $[y_1, y_2]$. Označme úhel u vrcholu $[0, 0]$ jako α. Délky úseček spojujících bod $[0, 0]$ s body $[x_1, x_2]$, $[y_1, y_2]$ spočítáme jako $\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$, délku úsečky spojující body $[x_1, x_2]$, $[y_1, y_2]$ jako $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. Kosinová věta nám tedy dá následující:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1^2 + x_2^2) + (y_1^2 + y_2^2) - 2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2} \cos \alpha$$

Po úpravě dostáváme

$$\frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} = \cos \alpha.$$

BRKOS Team

Pravá strana této rovnosti je ovšem vždy menší nebo rovna jedné (jelikož kosinus může nabývat pouze hodnot z intervalu $\langle -1, 1 \rangle$). Po umocnění na druhou a vynásobení jmenovatelem dostaneme Cauchy-Schwarzovu nerovnost pro $n = 2$. Zkušenější čtenář nyní snadno pozná, že obecná verze by se dokazovala úplně stejně, pouze by náš trojúhelník ležel v n-rozměrném prostoru.

Jako příklad využití Cauchy-Schwarze zkusme dosadit $y_1 = \cdots = y_n = 1$. Potom dostaneme nerovnost $n(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \geq (x_1 + \cdots + x_n)^2$ zmíněnou výše.

Cauchy-Schwarz nabývá také jisté speciální formy, která je velice užitečná při řešení úloh na nerovnosti:

Věta (Cauchy-Schwarz zlomkobijec neboli Tituova nerovnost)**.** Pro kladná reálná čísla $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_n$ platí následující nerovnost:

$$\frac{u_1}{v_1} + \cdots + \frac{u_n}{v_n} \geq \frac{(\sqrt{u_1} + \cdots + \sqrt{u_n})^2}{v_1 + \cdots + v_n}.$$

Důkaz. Do Cauchy-Schwarzovy nerovnosti stačí dosadit $x_i = \sqrt{\frac{u_i}{v_i}}$, $y_i = \sqrt{v_i}$.

To by tedy bylo něco málo o nerovnostech. Pokud se chcete dozvědět více, mnohem obsáhlejší zato bezkonkurenčně nejlepší studijní text na toto téma je seriál o nerovnostech korespondenčního semináře Prase.

BRKOS Team