BRněnský KOrespondenční Seminář

XXVIII. ročník

2021/2022

Pomocný text ke 4. sérii

Projektivní prostor

autor: *Matouš Trnka*

Tato série je věnovaná tématu projektivního prostoru, přesněji řečeno jeho speciálnímu případu - reálné projektivní rovině. Ukážeme si, že půjde o jisté zobecnění důvěrně známé reálné roviny, a to o nevlastní body (čili tzv. „body v nekonečnu“). (Přívlastek „reálný“ je u reálné projektivní roviny podstatný, my jej zde však budeme často vynechávat, neboť se v tomto textu o jiných projektivních prostorech nehovoří.)

Nejprve začneme s nižší dimenzí - uvedeme si, jak vypadá tzv. projektivní přímka. Pak rozšíříme myšlenky do projektivní roviny a nakonec pouze naznačíme, jak by vypadal projektivní prostor dimenze 3 (klasický prostor) a výše.

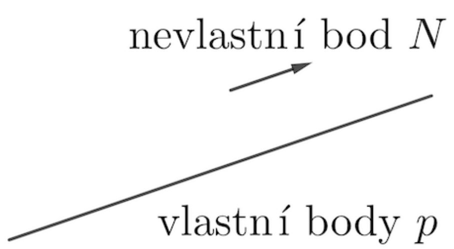
Motivace Na takové projektivní rovině se octneme pokaždé, když se podíváme na rovnoběžné koleje sbíhající se do jednoho bodu nebo na fotografii zobrazující perspektivu např. nějakých budov, atd. Zkrátka kdykoli, když je pozorovatel vysunut nad základní rovinu a pozoruje věci v oné rovině.

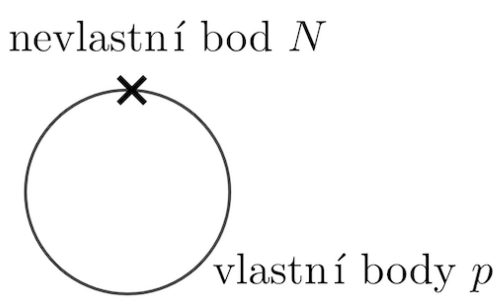
Projektivní přímka

Nechť je dána reálná (tzn. klasická, důvěrně známá) přímka p. Ta míří do jednoho bodu v nekonečnu – říkáme mu **směr** nebo **nevlastní bod**. Do tohoto bodu bychom se dostali za nekonečně dlouhý čas, kdybychom se po této přímce vydali. Je však jedno, na kterou stranu vyrazíme. Kdybychom se vydali na opačnou, říkáme, že se dostaneme do stejného bodu v nekonečnu.

Projektivní přímka je pak tvořena touto reálnou přímkou p spolu s jejím směrem. Jde vlastně o sjednocení množiny bodů na přímce p a jednoprvkové množiny obsahující nevlastní bod N. Body na projektivní přímce tak můžeme rozdělit do dvou skupin. Vlastní body, ty v konečnu, které leží na reálné přímce, a jeden jediný nevlastní bod.

Podobnou konstrukci můžeme vidět např. u kružnice, na které si vybereme jeden bod, označíme jej za nevlastní a všechny ostatní body na kružnici označíme za vlastní.



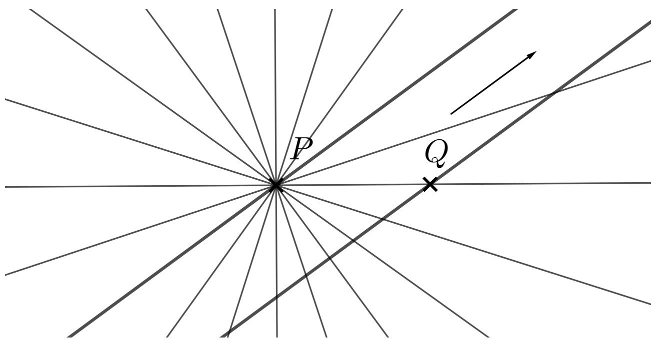


Projektivní rovina

Nechť je dána reálná (tzn. klasická, důvěrně známá) rovina ρ. Pokud se po ní vydáme do nekonečna, tak už nemáme pouze jeden směr na výběr, nýbrž celou řadu. Zvolme si v této reálné rovině bod $P \in \rho$ a uvažme všechny směry, kam se můžeme z bodu P vydat. Každá přímka v rovině ρ, která prochází bodem P, nám jeden takový směr udává (připomínáme, že pouze jeden, nikoli dva, viz předchozí sekce).

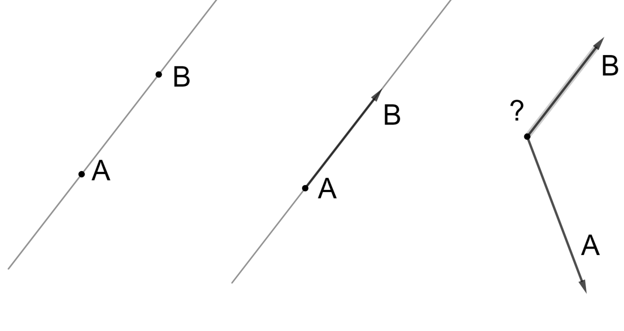
Množinu všech nevlastních bodů / bodů v nekonečnu / přímek procházejících bodem P označme η. Když se totiž vydáme z jiného bodu, např. z bodu Q po přímce q, určitě bude přímka q rovnoběžná s některou přímkou z množiny η a rovnoběžky jak známo míří stejným směrem. Proto se množina η nezmění a plně dostačuje pro definici projektivní roviny.

Projektivní rovina je tedy sjednocení množiny ρ (vlastní body – body v reálné rovině) a množiny η (nevlastní body - přímky procházející bodem P ležící v ρ).



Zde jsme narazili na jeden velice důležitý poznatek. Pokud říkáme, že rovnoběžky míří stejným směrem, znamená to, že obě dvě projektivní přímky obsahují stejný nevlastní bod (tj. bod v nekonečnu), čili se v tomto bodě potkávají. Připomeňme, že reálné přímky se potkají právě tehdy, jsou-li různoběžné nebo totožné. Kdežto projektivní přímky se potkají VŽDY.

Velikou výhodou tedy budiž následující fakt. V reálné rovině lze vést každými dvěma body právě jednu přímku. Jak je to ale v rovině projektivní? Uvažme dva body v projektivní rovině. Ty mohou být buď oba vlastní, pak opravdu hledáme přímku procházející dvěma reálnými body, což lze. Nebo je jeden vlastní a jeden nevlastní, pak hledáme přímku, která prochází daným reálným bodem a míří daným směrem. To však taky zadává právě jednu přímku. Nakonec můžeme mít zadané oba body nevlastní, pak se jedná o tzv. „nevlastní přímku“, která je však velice exotická. Je to přesně množina všech směrů, čili nevlastních bodů.



BRKOS Team

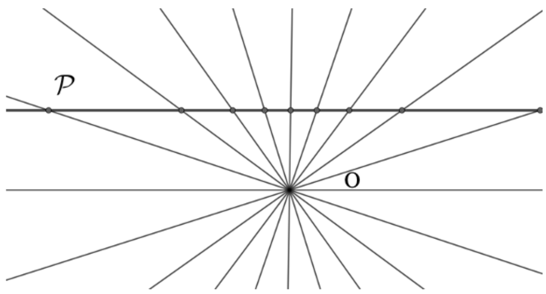
Projektivní prostor

Projektivním prostorem rozumíme obecně prostor (dimenze 3 nebo více), který je navíc obohacen o množinu směrů, čili množinu přímek procházejících skrz zvolený bod P. Myšlenka je tedy stejná jako u projektivní roviny.

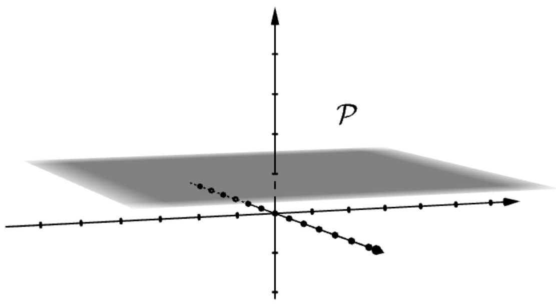
Projektivní rozšíření reálného prostoru

V následujících odstavcích se ještě seznámíme s trochu složitějším přístupem k projektivním prostorům, a to opět nejdříve v dimenzi 1, 2, a nakonec 3 a více.

Uvažme v rovině přímku $\mathcal{P}$ a mimo ni bod O. Potom každá přímka, která prochází bodem O, odpovídá jednomu bodu na projektivní přímce. Totiž je-li přímka p procházející bodem O různoběžná s $\mathcal{P}$, pak jejich průsečík odpovídá vlastnímu bodu na $\mathcal{P}$. Naopak, je-li p rovnoběžná s $\mathcal{P}$, pak je jejich průsečíkem bod nevlastní. Mluvíme tedy o tzv. **projektivním rozšíření přímky**.



Posuneme-li se o dimenzi výš, uvažme ve trojrozměrném prostoru rovinu $\mathcal{P}$ a mimo ni bod O. Podobně každá přímka p procházející bodem O odpovídá nějakému bodu z projektivní roviny. Opět, protíná-li přímka p rovinu $\mathcal{P}$, jde o vlastní bod projektivní roviny, a je-li p s rovinou $\mathcal{P}$ rovnoběžná, pak je jistě rovnoběžná s nějakým směrem z dané roviny, a tím pádem odpovídá nějakému nevlastnímu bodu. Mluvíme pak o **projektivním rozšíření roviny**.



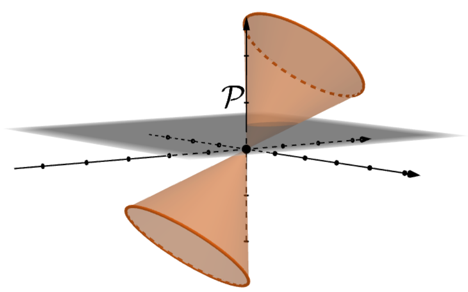
Nakonec, představíme-li si v $(n+1)$-rozměrném prostoru n-rozměrný podprostor $\mathcal{P}$ a mimo něj bod O, pak přímky procházející bodem O odpovídají n-rozměrnému projektivnímu prostoru a jde o **projektivní rozšíření n-rozměrného prostoru**.

BRKOS Team

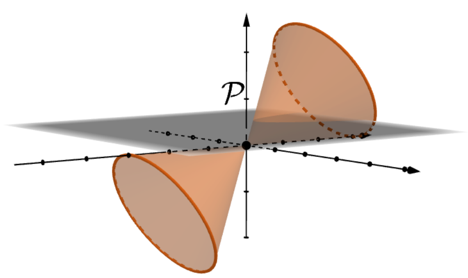
Kuželosečky

Tento odstavec je navíc pouze pro ty, kteří se již setkali s kuželosečkami. V projektivní geometrii člověk může ztotožnit všechny druhy kuželoseček. Přenesme se zpět do projektivního rozšíření reálné roviny a definujme si, co je to tzv. **projektivní kružnice**. Je to soubor přímek procházejících bodem O, které vytínají v rovině $\mathcal{P}$ kružnici. Je to tedy soubor přímek ležících na nějakém rotačním dvojkuželi s vrcholem v O. Nyní už jen záleží, jak daný přímkový dvojkužel natočíme vůči rovině $\mathcal{P}$. Elipsa je ta, která má všechny body vlastní, parabola ta, která má jeden bod nevlastní (čili se „dotýká“ nevlastní přímky), a hyperbola ta, která má dva body nevlastní (čili „protíná“ nevlastní přímku).

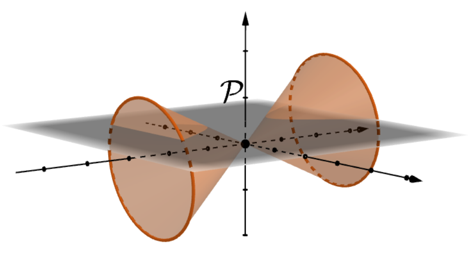
Elipsa:



Parabola:



Hyperbola:



(Doporučujeme si obrázky prohlédnout zblízka a zároveň upozorňujeme, že na obrázcích se vrcholy kuželů neprotínají s rovinou $\mathcal{P}$ i když to tak možná trochu vypadá.)

Velikou výhodu projektivních prostorů pak lze získat, když zapomeneme na reálnou rovinu a uvažujeme pouze o přímkách. Pak totiž nemusíme rozlišovat, které body jsou vlastní a které nevlastní. Ale o tom zase jindy...

BRKOS Team