BRněnský KOrespondenční Seminář

XXVIII. ročník

2021/2022

Pomocný text ke 2. sérii

POLYNOMY

autor: *Vojtěch Turland*

Tématem druhé série jsou polynomy. Řekneme si tedy nejprve, co to vlastně takový polynom je. Za polynom považujeme buď nulu, nebo výraz ve tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ mohou patřit do $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ a dalších, podobně je na tom i proměnná x; pro a_n navíc platí $a_n \neq 0$. Pokud není řečeno jinak, většinou uvažujeme polynomy s proměnnou z $\mathbb{R}$ a koeficienty z $\mathbb{R}$, ale v úlohách narazíte i na polynomy s koeficienty ze $\mathbb{Z}$.

Užitečné pojmy:

- $a_n x^n$ – **vedoucí člen**, a_n – **vedoucí koeficient**
- a_0 – **absolutní člen**
- **stupeň polynomu** je roven n v exponentu ve vedoucím členu (stupeň značíme $st(P)$)
- **lineární polynom** je polynom stupně jedna, tedy ve tvaru $a_1 x + a_0$ pro a_1 nenulové

Značení. Polynomy značíme podobně, jako jsme zvyklí značit funkce. Můžeme mít například polynom $P(x) = x^2 - 2x + 1$, kde $P(x)$ pro nás bude znamenat to, že „polynom P zapíšeme v proměnné x“. Podobně bychom mohli ten stejný polynom napsat jako $P(a) = a^2 - 2a + 1$.

Úpravy polynomů. Polynomy jsme si definovali jako výrazy určitého tvaru, přičemž výrazy umíme různě upravovat. Často je praktické polynom rozložit na součin dvou polynomů; např. $P(x) = x^2 - 2x + 1$ lze rozložit do tvaru $(x-1) \cdot (x-1)$.

Dva polynomy můžeme také srovnávat. Polynomy P a Q stejného stupně se rovnají, jestliže si jsou rovny příslušné koeficienty ve všech členech, tedy:

$$P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \ldots p_1 x + p_0$$

$$Q(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \ldots q_1 x + q_0$$

$$P = Q \textit{ právě tehdy, když } p_0 = q_0, p_1 = q_1, \ldots p_n = q_n.$$

Věta o jednoznačném dělení se zbytkem. Polynomy také můžeme navzájem dělit, platí následující věta: Mějme dva polynomy $P(x), Q(x)$, kde $st(P) \geq st(Q)$. Pak existuje právě jedna dvojice polynomů $M(x), N(x)$ takových, že $st(Q) > st(N)$ a navíc:

$$P(x) = Q(x)M(x) + N(x).$$

Hodnota polynomu. Zmínili jsme, že polynomy značíme podobně jako funkce, a to je proto, že se na ně jako na funkce skutečně můžeme dívat. **Hodnotu polynomu** $P(x)$ v čísle $q \in \mathbb{R}$ značíme $P(q)$ a získáme ji tak, že za x jednoduše dosadíme q. My jsme si tu jeden polynom $P(x) = x^2 - 2x + 1$ uvedli. Jeho hodnota například v 2 je $P(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 1 = 1$. Hezké také je, že $P(x)$ je v podstatě hodnota polynomu v čísle označeném „x“.

Kořen polynomu. Pro některá taková q dosazená do $P(x)$ bude platit, že $P(q) = 0$. Pak všechna taková q nazýváme **kořeny polynomu** $P(x)$. S kořenem polynomů úzce souvisí i **kořenový činitel**, což je polynom ve tvaru $(x - x_0)$, kde $x_0 \in \mathbb{R}$ je kořen polynomu $P(x)$. Pro $P(x)$ s kořenem x_0 platí, že ho lze vyjádřit jako součin jeho kořenového činitele a nějakého polynomu menšího stupně, tj. ve tvaru $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x)$.

O kořenech polynomů platí užitečné tvrzení: **Polynom stupně n s reálnými koeficienty má nejvýše n reálných kořenů (i s násobností).**

Užitečné vlastnosti kořenů můžeme využít i u úloh, které zdánlivě s kořeny nijak nesouvisejí. Pokud bychom například hledali ty hodnoty x, pro které se hodnoty polynomů P a Q rovnají, místo řešení úlohy ve tvaru $P(x) = Q(x)$ můžeme řešit ekvivalentní úlohu $P(x) - Q(x) = 0$, tedy hledat kořeny polynomu $P - Q$ a využít tak toho, že o kořenech některé věci už víme.

BRKOS Team